

Suites orthogonales à une classe de systèmes dynamiques

Thierry de la Rue (LMRS, CNRS - Université de Rouen Normandie)

Exposé basé sur des travaux en collaboration avec

- Martyna Gońska
 - Joanna Kutaga-Przymus
 - Mariusz Cemańczyk
- } (Université Nicolas Copernic,
Toruń)
- Adam Kanigowski (Université du Maryland)

Motivation : la conjecture de Sarnak (2010)

Fonction de Möbius $\mu : \mathbb{N}^* \rightarrow \{-1, 0, 1\}$

$$\mu(n) := \begin{cases} 0 & \text{si } \exists p : p^2 \mid n \\ (-1)^k & \text{si } n = p_1 p_2 \cdots p_k \quad (p_i \neq p_j) \end{cases}$$

$\mu = \lambda \eta$, où λ est la fonction de Liouville

$$\lambda(n) := (-1)^{\sum_{i=1}^k \alpha_i} \quad \text{si } n = \prod_{i=1}^k p_i^{\alpha_i}$$

$\eta = \mu^2$ = indicatrice des « sans carré ».

Motivation : la conjecture de Sarnak (2010)

Principe d'aléa de Möbius

μ n'a aucune corrélation avec une suite ξ

« raisonnablement simple » :

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mu(n) \xi(n) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$$

Motivation : la conjecture de Sarnak (2010)

Principe d'aléa de Möbius

μ n'a aucune corrélation avec une suite ξ

« raisonnablement simple » :

$$\uparrow \quad \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mu(n) f(T^n x) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$$

produite par un système dynamique déterministe :

$x \in X$ espace métrique compact

$f: X \rightarrow \mathbb{C}$ continue

$T: X \rightarrow X$ homéomorphisme d'entropie nulle.

Motivation : la conjecture de Sarnak (2010)

Conjecture de Sarnak

μ n'a aucune corrélation avec une suite
produite par un système dynamique déterministe :

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mu(n) f(T^n x) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$$

$\forall \quad x \in X$ espace métrique compact

$f: X \rightarrow \mathbb{C}$ continue

$T: X \rightarrow X$ homéomorphisme d'entropie nulle.

Question générale

Si $\mu = (\mu(n))$ est une suite bornée de nombres complexes, peut-on caractériser l'absence de corrélation entre μ et les suites produites par toute une classe de systèmes dynamiques ?

$$\mu \in \mathcal{C}^{\perp} : \forall (X, T) \in \mathcal{G}, \forall f \in C(X), \forall x \in X,$$

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mu(n) f(T^n x) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$$

Conjecture de Sarnak : $\mu \in \mathcal{C}_{\mathbb{Z}^d}^{\perp}$

classe des systèmes d'entropie nulle

3 types d'objets

Suites bornées

$$u = (u(n))_{n \in \mathbb{Z}}$$

$$u(n) \in U := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$$

$$u \in (U^{\mathbb{Z}}, S)$$

shift

systemes de
Furstenberg
de u

Systèmes dynamiques topologiques

$$(X, T)$$

métrique
compact

homéomorphisme

$$f(T_x^n)$$

modèle
topologique

Systèmes dynamiques mesurés

$$(Z, \mathcal{C}, R)$$

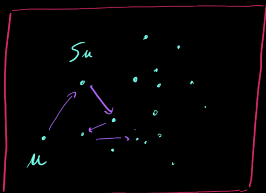
proba

proba sur $B(Z)$

transformation
inversible,
bi-mesurable,
préservant $\mathcal{C}$

proba T -invariante

Systèmes de Furstenberg d'une suite u



$U^{\mathbb{Z}}$
métrique compact

système de Furstenberg
de u

$$(U^{\mathbb{Z}}, \mu, S)$$

: système dynamique mesuré

$$u \in U^{\mathbb{Z}} \xleftarrow{S} S: \text{shift}$$

Mesures empiriques le long de
l'orbite de u :

$$\underbrace{\mathcal{F}(N_k): \frac{1}{N_k} \sum_{n=1}^{N_k} \delta_{S_u^n}}_{\in \mathcal{M}_1(U^{\mathbb{Z}}) \text{ (topologie faible)}} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \mu \in \mathcal{M}_1(U^{\mathbb{Z}})$$

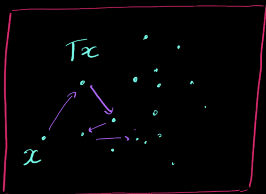
S -invariante

$\in \mathcal{M}_1(U^{\mathbb{Z}})$ (topologie faible)

$\rightarrow$ métrique compact

Systèmes de Furstenberg d'un point x

dans un système (X, T)



X
métrique compact

Mesures empiriques le long de
l'orbite de x :

$$\mathcal{E}(N_k) : \frac{1}{N_k} \sum_{n=1}^{N_k} \delta_{T^n x} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \mu \in \mathcal{M}_1(X)$$

T -invariante

$\mu \in \mathcal{M}_T(x) =$ mesures visibles
sur l'orbite de x

système de Furstenberg
de x

$$(X, \mu, T)$$

$\mathcal{M}(X, T) := \bigcup_{x \in X} \mathcal{M}_T(x)$: mesures
visibles
dans
 (X, T)

Conjecture de Chowla (1965)

La fonction de Liouville λ n'a qu'un seul système de Furstenberg :

$$V_S(\lambda) = \{\nu\}, \text{ où } \nu := \left(\frac{1}{2} (\delta_1 + \delta_{-1}) \right)^{\otimes \mathbb{Z}}$$

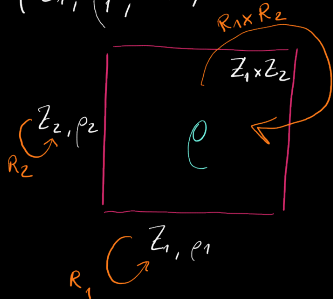
thm (Sarnak) : $\mid$ Chowla $\Rightarrow \lambda \in \mathcal{G}_{\mathbb{Z}\mathbb{E}}^{\perp}$

Ingrédient clé : $(\{-1, 1\}^{\mathbb{Z}}, \nu, S)$ schéma de Bernoulli.

$\rightarrow$ disjoint de tout système (Z, ρ, R)
d'entropie nulle.

Couplages et disjonction

(Z_1, ρ_1, R_1) et (Z_2, ρ_2, R_2) deux systèmes mesurés.



$\rho \in \mathcal{M}_1(Z_1 \times Z_2)$ est un couplage des deux systèmes si :

- ρ est $R_1 \times R_2$ -invariante
- les marginales de ρ sont ρ_1 et ρ_2

On note $\mathcal{J}(R_1, R_2)$ l'ensemble des couplages.

Les deux systèmes sont disjoints si $\mathcal{J}(R_1, R_2) = \{ \rho_1 \otimes \rho_2 \}$
 $(R_1 \perp R_2)$

Conjecture de Chowla (1965)

La fonction de Liouville λ n'a qu'un seul système de Furstenberg :

$$V_S(\lambda) = \{\nu\}, \text{ où } \nu := \left(\frac{1}{2} (\delta_1 + \delta_{-1}) \right)^{\otimes \mathbb{Z}}$$

thm (Sarnak) : $\mid$ Chowla $\Rightarrow \mu \in \mathcal{G}_{\mathbb{Z}E}^{\perp}$

Pourtant, $\forall \kappa \in V_S(\mu)$, $(\{-1, 0, 1\}^{\mathbb{Z}}, \kappa, S)$

a toujours un facteur d'entropie 0 :

$$(\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}, \kappa_m, S), \text{ où } \{\kappa_m\} \leftarrow V_S(\mu^2)$$

← mesure de Minsky

Pourquoi Chowla $\Rightarrow$ Sarnak

$$\text{Chowla : } V_S(\lambda) = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (s_i + s_{i+1}) \right)^{\otimes \mathbb{Z}} \right\}$$

$$(p = \lambda \cdot p^\perp) \Rightarrow V_S(p) = \{ \kappa \}$$

et dans $(U^{\mathbb{Z}}, \kappa, S)$ on a

$$E_{\kappa} \left[\tilde{\xi}_1 \mid \underbrace{IT(U^{\mathbb{Z}}, \kappa, S)} \right]$$

↑
coordonnée 1 dans $U^{\mathbb{Z}}$

↑
Facteur de Pinsker du système $(U^{\mathbb{Z}}, \kappa, S)$:
plusieurs facteurs d'entropie nulle.

$$\Rightarrow p \in \hat{C}_{\mathbb{Z}\mathbb{C}}^{\perp} : \text{Sarnak}$$

Pourquoi Chowla $\Rightarrow$ Sarnak

$$\text{Chowla : } V_S(\lambda) = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (s_i + s_{-i}) \right)^{\otimes \mathbb{Z}} \right\}$$

$(p = \lambda \cdot p^\perp) \Rightarrow$ Conjecture de Veech : $\forall K \in V_S(\mu),$

dans $(U^\mathbb{Z}, \kappa, S)$ on a

$$E_\kappa \left[\sum_1 \mid \underbrace{IT(U^\mathbb{Z}, \kappa, S)} \right]$$

↑
coordonnée 1 dans $U^\mathbb{Z}$

↑
Facteur de Pinsker du système $(U^\mathbb{Z}, \kappa, S)$:
plus gros facteur d'entropie nulle.

$\Rightarrow \mu \in \hat{C}_{\mathbb{Z}\mathbb{C}}^{\perp} : \text{Sarnak}$

Propriété de Veech pour l'entropie nulle

$$\mu \in VP(ZE)$$

$$\Leftrightarrow \forall \kappa \in V_S(\mu),$$

dans $(U^{\mathbb{Z}}, \kappa, S)$ on a

$$E_{\kappa} \left[\sum_1 \mid TT(U^{\mathbb{Z}}, \kappa, S) \right] = 0$$

Thm : $VP(ZE) \subset G_{ZE}^{\neq}$

↑
remplacer l'entropie
nulle par une autre
classe ?

↑
rôle du facteur
de Pinsker !

Classes caractéristiques

Une classe $\mathcal{F}$ de systèmes mesurés est **caractéristique** si elle est stable :

- par isomorphisme
- par passage au facteur
- par couplage dénombrable

Dans tout système (Z, ρ, R)

il existe un plus gros

$\mathcal{F}$ -facteur $A_{\mathcal{F}} \subset B(Z)$

Exemples classiques :

ZE : entropie nulle

$A_{ZE} = \Pi(Z, \rho, R)$: facteur de Pinsker

ID : identités

$A_{ID} = \mathcal{I}_R$: facteur des invariants

$DISP$: spectre discret

A_{DISP} : facteur de Kronecker

NIL_{Δ} : composantes ergodiques = nilsystèmes d'ordre Δ

$A_{NIL_{\Delta}} = \mathcal{Z}_{\Delta}$: facteur de structure d'ordre Δ (Host-Kra)

$RIG(q_n)$: $R^{q_n} \rightarrow Id$

Rôle du plus gros $\mathcal{F}$ -facteur $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}$

Contrôle des couplages entre (Z, ρ, R) et
un $\mathcal{F}$ -système (Y, ν, T)

$$\forall \gamma \in \underset{\in \mathcal{F}}{J(R, T)}, \quad \forall f \in L^2(Z, \rho),$$

$$\mathbb{E}_{\rho}[f | \mathcal{A}_{\mathcal{F}}] = 0 \implies \forall g \in L^2(Y, \nu),$$

$$\mathbb{E}_{\gamma}[f(z)g(y)] = 0$$

Propriété de Veech pour une classe caractéristique $\mathcal{F}$

$$\mu \in VP(\mathcal{F})$$

$$\Leftrightarrow \forall K \in V_S(\mu), \text{ dans } (\mathbb{U}^{\mathbb{Z}}, K, S) \text{ on a}$$

$$E_K[\Sigma_1 | A_{\mathcal{F}}] = 0$$

$$\underline{\text{thm}} : \boxed{VP(\mathcal{F}) \subset \mathcal{C}_{\mathcal{F}}^{\#}}$$

où $\mathcal{C}_{\mathcal{F}}$ est la classe des systèmes dynamiques topologiques dont toutes les mesures visibles définissent des systèmes mesurés dans la classe $\mathcal{F}$.

$$\text{Preuve de } VP(\mathcal{F}) \subset \tilde{C}_{\mathcal{F}}^{\perp}$$

$$\mu \in VP(\mathcal{F}), (X, T) \in \tilde{C}_{\mathcal{F}}, x \in X, f \in C(X)$$

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mu(n) f(T^n x) \longrightarrow 0 ?$$

$$(\mu, x) \in (\mathbb{U}^{\mathbb{Z}} \times X, S \times T)$$

$$(N_k) \text{ telle que } \frac{1}{N_k} \sum_{n=0}^{N_k-1} \delta_{(S^n \mu, T^n x)} \longrightarrow \kappa \quad \mathcal{F}\text{-système}$$

$$\text{alors } \kappa \in \mathcal{I}(\kappa_\mu, \kappa_x), \text{ où } \kappa_\mu \in V_S(\mu) \text{ et } \kappa_x \in V_T(x)$$

$$\text{et } \lim_{N_k} \frac{1}{N_k} \sum_{n=1}^{N_k} \mu(n) f(T^n x) = \mathbb{E}_{\kappa} [\xi_1 \otimes f] = 0$$

$$\text{ou } \mathbb{E}_{\kappa_\mu} [\xi_1 | \mathcal{A}_{\mathcal{F}}] = 0 \text{ (par } VP(\mathcal{F}))$$

Réciproque ?

$$\text{A-t-on } \mathcal{C}_{\mathcal{F}} \stackrel{||}{\subset} VP(\mathcal{F}_e) ?$$

→ Faux en général (contre-exemple
construit à partir de $RIG(q_n)$ pour
une suite (q_n) particulière)

→ Vrai pour de nombreuses « bonnes »
classes caractéristiques (dont ZE)

à préciser !

Corollaire : conjecture de Veech $\Leftrightarrow$ conjecture de Sarnak

ec - classes

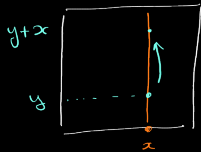
$\mathcal{F}_e$ une classe caractéristique de systèmes mesurés

$\mathcal{F}_{ec}$:= classe des systèmes mesurés dont presque toutes les composantes ergodiques sont dans $\mathcal{F}_e$.

Prop. | $\mathcal{F}_{ec}$ est encore une classe caractéristique

Déf. | $\mathcal{F}_e$ est une ec-classe si $\mathcal{F}_e = \mathcal{F}_{ec}$

DISP n'est pas une ec-classe :



ex. : ZE est une ec-classe

. $\mathcal{F}_{ec}$ est toujours une ec-classe

$(\mathbb{T} \times \mathbb{T}, \text{leb} \otimes \text{leb}, (x, y) \mapsto (x, y+x))$
 $\in \text{DISP}_{ec} \setminus \text{DISP}$

thm

Si $\mathcal{F}$ est une ec-classe, alors

$$\dot{C}_{\mathcal{F}}^{\perp} = VP(\mathcal{F})$$

3 outils pour la preuve de $\dot{C}_{\mathcal{F}}^{\perp} \subset VP(\mathcal{F})$:

① « MOMO fort » (Mean Orthogonality on Moving Orbits)

Si $u \in \dot{C}_{\mathcal{F}}^{\perp}$ et $(X, T) \in \dot{C}_{\mathcal{F}}$, alors

$\forall f \in C(X), \forall (x_k) \subset X, \forall (b_k) : 0 = b_0 < b_1 < \dots < b_k < \dots$
avec $b_{k+1} - b_k \rightarrow +\infty$

$$\frac{1}{b_K} \sum_{k=1}^K \left| \sum_{n=b_{k-1}+1}^{b_k} u(n) f(T^{n-b_{k-1}} x_k) \right| \xrightarrow{K \rightarrow \infty} 0$$

② Modèle de Hansel (1974) (+ Downarowicz - Weiss 2022)

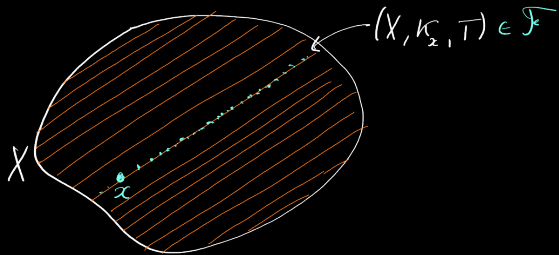
(version non ergodique de Jewett-Krieger)

Si (Z, ρ, R) est un système mesuré dans $\mathcal{F}$

il admet un modèle topologique (X, T)

dans lequel tout point possède un unique

système de Furstenberg, qui est ergodique et dans $\mathcal{F}$



③ Relèvement

(Y, S) et (X, T) deux systèmes topologiques

• $y \in Y$ t.q. $\frac{1}{N_k} \sum_{n=1}^{N_k} S_{S^n y} \rightarrow \kappa \in \mathcal{V}_S(y)$

• μ proba T -invariante sur X

• ρ un couplage de (Y, κ, S) et (X, μ, T)

Peut-on voir ρ comme un élément de $\mathcal{V}_{S \times T}(y, x)$
pour un certain $x \in X$?

→ en général non. Mais : $\exists (N_{k_\ell}), \exists (x_n) \subset X$

avec $x_{n+1} = T x_n$ sauf pour $n \in \{b_1, b_2, \dots\}$ où $b_{k+1} - b_k \rightarrow \infty$

et: $\rho = \lim_{N_{k_\ell}} \frac{1}{N_{k_\ell}} \sum_{n=1}^{N_{k_\ell}} S_{(S^n y, x_n)}$

Interprétation combinatoire de $VP(\mathbb{Z}E)$

On suppose que u ne prend qu'un nombre fini de valeurs.

$$\text{Alors, } \forall K \in \mathcal{V}_S(u), \quad \Pi(\mathcal{U}^{\mathbb{Z}}, K, S) = \bigcap_{m \geq 0} \sigma(\underbrace{\xi_m, \xi_{m+1}, \dots}_{\text{coordonnées dans } \mathcal{U}^{\mathbb{Z}}})$$

$$E_K[\xi_1 | \Pi(\mathcal{U}^{\mathbb{Z}}, K, S)] = \lim_{m \rightarrow \infty} E_K[\xi_1 | \xi_m, \xi_{m+1}, \dots]$$

$$u \in VP(\mathbb{Z}E)$$

$$\Leftrightarrow \forall K \in \mathcal{V}_S(u), \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{\substack{f \in C(\mathcal{U}^{\mathbb{N}}) \\ \|f\|_{\infty} \leq 1}} E_K[\xi_1, f(\xi_m, \xi_{m+1}, \dots)] = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall (N_k) \text{ donnant un système de Furstenberg de } u,$$

$$\sup_{\substack{f \in C(\mathcal{U}^{\mathbb{N}}) \\ \|f\| \leq 1}} \lim_K \frac{1}{N_k} \sum_{n=1}^{N_k} u(n) f(u(n+m), u(n+m+1), \dots) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$$