DM1 - à rendre le 2 février

Exercice 1. Universalité de l'espace de Cantor.

On se propose de redémontrer le fait que l'espace de Cantor se surjecte continûment sur tout compact polonais.

1. En utilisant le développement binaire, montrer que l'espace de Cantor se surjecte continûment sur $[0,1]$, puis sur $[0,1]^{\mathbb{N}}$.
2. Rappeler pourquoi tout compact polonais est homéomorphe à un fermé de $[0,1]^{\mathbb{N}}$.
3. En utilisant le fait que tout fermé de l'espace de Cantor est un retract de l'espace de Cantor, déduire des questions précédentes que l'espace de Cantor se surjecte continûment sur tout compact polonais.

Exercice 2. Caractérisation de l'espace de Baire.

Montrer qu'à homéomorphisme près, l'espace de Baire est le seul espace polonais zéro-dimensionel non vide dont les compacts sont d'intérieur vide. On pourra s'inspirer de la preuve de la caractérisation analogue de l'espace de Cantor.

Exercice 3. Construction de Cantor-Bendixon et groupes dénombrables.

Soit Γ un groupe dénombrable infini. On considère $\{0,1\}^\Gamma$ muni de la topologie produit, qui en fait un espace de Cantor et que l'on identifie à l'ensemble des parties de Γ.

1. Soit $\mathcal{SG}_\Gamma$ l'ensemble des sous groupes de Γ. Montrer que $\mathcal{SG}_\Gamma$ est un fermé de $\{0,1\}^\Gamma$.
2. Effectuer la construction de Cantor-Bendixon sur $\mathcal{SG}_{\mathbb{Z}}$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ le rang de Cantor-Bendixon de $\mathcal{SG}_{\mathbb{Z}^n}$ est égal à $n+1$.

Exercice 4. Un théorème de Banach et Mazur.

On rappelle qu'étant donné un ensemble X, l'espace $\ell^\infty(X,\mathbb{R})$ des applications bornées de X dans $\mathbb{R}$ est un espace de Banach[1] pour la norme $\|f\|_\infty = \sup_{x\in X} |f(x)|$.

De plus, si X est compact polonais, l'espace $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ des applications continues de X dans $\mathbb{R}$ est fermé dans $\ell^\infty(X,\mathbb{R})$ donc également un espace de Banach (séparable).

Enfin si V est un espace de Banach séparable, la boule unité fermée de son dual V^* est compacte polonaise pour la topologie faible-*, qui est la plus petite topologie rendant continue $\varphi \in V^* \mapsto \varphi(x) \in \mathbb{R}$ pour tout $x \in V$ (théorème de Banach-Alaoglu).

1. Expliquer pourquoi tout espace de Banach séparable V est isométrique à un sous-espace de $\mathcal{C}(B_1(V^*),\mathbb{R})$, où $B_1(V^*)$ est la boule unité fermée du dual de V munie de la topologie faible-*.
2. Montrer que tout espace métrique séparable (X,d) est isométrique à sous-ensemble d'un espace de Banach séparable. On pourra fixer $x_0 \in X$ et considérer l'application qui à $x \in X$ associe
$$\Phi(x) : y \in X \mapsto d(y,x) - d(y,x_0).$$
3. En déduire que $\mathcal{C}(2^{\mathbb{N}},\mathbb{R})$ contient une copie isométrique de tout espace métrique séparable.
4. Démontrer le théorème de Banach et Mazur qui dit que $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ contient une copie isométrique de tout espace métrique séparable.

1. Attention, il n'est séparable que lorsque X est fini !