DM3 - à rendre le 9 mars

Exercice 1. Transfert d'ensembles Baire-mesurables.
Dans cet exercice, on va montrer que le fait que tous les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ soient Baire-mesurables implique que tous les sous-ensembles de tout espace polonais sont Baire-mesurables.

1. Soit X un espace topologique de Baire, soit $Y \subseteq X$ une intersection dénombrable d'ouverts denses. Montrer que $A \subseteq X$ est Baire mesurable dans X ssi $A \cap G$ est Baire mesurable dans G.
2. On veut maintenant montrer que si X et Y sont deux espaces polonais parfaits, alors il existe $G_X \subseteq X$ G_δ dense et $G_Y \subseteq Y$ G_δ dense tels que G_X et G_Y sont homéomorphes.
   (a) Soit X un espace polonais. Montrer que X contient un G_δ dense zéro-dimensionnel (*indication* : Prendre une base (U_n) d'ouverts de X et utiliser le fait que $\bar{U}_n \setminus U_n$ est nulle part dense).
   (b) Soit X un espace polonais parfait. Montrer que si $D \subseteq X$ est dénombrable dense, alors les compacts de $X \setminus D$ sont d'intérieur vide dans $X \setminus D$. L'hypothèse "X parfait" est-elle nécessaire ?
   (c) En déduire que tout espace polonais parfait contient un G_δ dense homéomorphe à l'espace de Baire.
   (d) Conclure.
3. Déduire des questions précédentes que si toute partie de $\mathbb{R}$ est Baire-mesurable, alors toute partie de tout espace polonais est Baire-mesurable.

Exercice 2. Théorème de Kunen-Martin.
Étant donnée une relation bien fondée $\prec$ sur un ensemble non vide X, on définit un rang associé sur X par induction : le rang de $x \in X$ est

$$\rho_\prec(x) := \sup_{y \prec x}(\rho_\prec(y) + 1).$$

Le rang de $\prec$ est alors défini par $\rho(\prec) := \sup_{x\in X}(\rho_\prec(x) + 1)$. On se propose de montrer le théorème de Kunen-Martin : si X est un borélien standard, toute relation bien fondée $\prec$ qui est analytique (comme sous ensemble de $X \times X$) vérifie $\rho(\prec) < \omega_1$.

1. On a vu en cours que si S et T sont des arbres sur $\mathbb{N}$ alors $\rho(S) \leqslant \rho(T)$ ssi il existe $f : S \to T$ strictement croissante. Généraliser ce résultat à des arbres sur un ensemble quelconque. Quelle forme d'axiome du choix avez-vous utilisée ?
2. Soit $\prec$ une relation bien fondée sur un ensemble X, on définit un arbre $T_\prec$ sur X dont les sommets sont les $(x_0, ..., x_n)$ avec $x_{i+1} \prec x_i$ pour $i = 0, ..., n-1$. Montrer que $\rho(\prec) = \rho(T_\prec)$.
3. Montrer le théorème de Kunen-Martin.