TD3 - Hiérarchie borélienne

Exercice 1. Paramétrages X-universels.
Soit X un espace polonais non dénombrable, montrer qu'il existe un X-paramétrage universel de $\mathbf{\Sigma}^0_\xi(X)$.

Exercice 2. Non trivialité de la hiérarchie aux ordinaux limites.
Soit X un espace polonais non dénombrable et $\xi < \omega_1$ un ordinal limite. Montrer que

$$\bigcup_{\eta<\xi} \mathbf{\Sigma}^0_\eta(X) \subsetneq \mathbf{\Sigma}^0_\xi(X).$$

Exercice 3. Calculs de complexité [1]

1. Montrer que l'ensemble des suites $(x_n) \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$ telles que $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ est un $\mathbf{\Pi}^0_3(\mathbb{N}^\mathbb{N})$.
2. Un sous-ensemble A de $\mathbb{N}$ est dit de densité nulle si
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|A \cap \{0, ..., n-1\}|}{n} = 0.$$
Montrer que l'ensemble des sous-ensembles de $\mathbb{N}$ de densité nulle est un $\mathbf{\Pi}^0_3(2^\mathbb{N})$.

Exercice 4. Absence de paramétrage universel des boréliens.
Soit X un espace polonais. Montrer qu'il n'y a pas de X-paramétrage universel de $\mathbf{\Delta}^1_1(X)$. Pouvez-vous généraliser ce résultat à d'autres classes $\mathbf{\Gamma}$?

Exercice 5. Réduction continue.
On définit la relation $\leqslant_c$ sur les sous-ensembles d'espaces polonais par : pour X et Y polonais, $A \subseteq X$ et $B \subseteq Y$, $(A, X) \leqslant_c (B, Y)$ si il existe une fonction continue $f : X \to Y$ telle que $A = f^{-1}(B)$. On note en fait souvent $A \leqslant_c B$ puisque les espaces X et Y sous-jacents sont souvent clairs.

1. Montrer que $\leqslant_c$ est un préordre (c'est-à-dire qu'elle est réflexive et transitive) et qu'elle n'est pas totale.
2. Soit X un espace polonais et $U \subseteq X$, donner une condition nécessaire et suffisante sur U pour que $(U, X) \leqslant_c (\{0\}, \{0, 1\})$.

Exercice 6. Γ-complétude.

1. Donner un exemple d'ensemble $\mathbf{\Delta}^0_1$-complet.
2. Soit X polonais. Montrer que si $A \subseteq X$ est $\mathbf{\Sigma}^0_\xi$-complet alors A n'est pas $\mathbf{\Pi}^0_\xi$.
3. Soit X un espace polonais, montrer qu'un ouvert $U \subseteq X$ est $\mathbf{\Sigma}^0_1$-complet ssi il n'est pas fermé.
4. On rappelle que l'ensemble des suites (A_n) de parties de $\mathbb{N}$ telles que pour tout n, A_n soit finie est Π^0_3-complet. En déduire que l'ensemble des suites d'entiers qui tendent vers $+\infty$ est Π^0_3-complet.

Exercice 7. Un exemple : mesures de probabilité.
Soit X un espace compact métrique, on note $Pr(X)$ l'ensemble des mesures de probabilité boréliennes sur X, qui est compact polonais pour la topologie rendant continue, pour chaque $f : X \to \mathbb{R}$ continue, la fonction $\mu \in Pr(X) \mapsto \int_X f(x)d\mu(x) \in \mathbb{R}$. Une mesure de probabilité sur X est dite **non atomique** si pour tout $x \in X$, on a $\mu(\{x\}) = 0$. Elle est **complètement atomique** si il existe $D \subseteq X$ dénombrable tel que $\mu(D) = 1$.

1. Pour beaucoup plus d'exemples, cf. [Kec95, chap. 23].

1. Ici $X = 2^{\mathbb{N}}$.
   (a) Montrer que l'ensemble des mesures non atomiques sur $2^{\mathbb{N}}$ est un G_δ. On pourra remarquer que μ est non atomique ssi pour tout $\epsilon > 0$ il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $s \in 2^n$, on ait $\mu(N_s) < \epsilon$.
   (b) Montrer que l'ensemble des mesures non atomiques sur $2^{\mathbb{N}}$ est $\mathbf{\Pi}^0_2$-complet. On pourra définir $\mu_0 = \delta_0$ et $\mu_1 = \frac{1}{2}\delta_0 + \delta_1$ puis associer à $x \in 2^{\mathbb{N}}$ la mesure produit $\bigotimes_{n\in\mathbb{N}} \mu_{x_i}$.
   (c) Montrer qu'à $N \in \mathbb{N}$ et $A > 0$ fixé, l'ensemble des mesures de probabilité dont les N plus gros atomes ont mesure $\geqslant A$ est fermé.
   (d) En déduire que l'ensembles des mesures complètement atomiques est $\mathbf{\Pi}^0_3$.
   (e) Montrer que l'ensemble des mesures complètement atomiques est $\mathbf{\Pi}^0_3$-complet. On pourra sommer les mesures de probabilité construites à la question (b).
2. En déduire les même résultats pour X compact polonais non dénombrable.

Indications

— Exercice 1 : Utiliser que X contient l'espace de Cantor $2^{\mathbb{N}}$ comme fermé. Attention, un $\mathbf{\Sigma}^0_\xi$ de $2^{\mathbb{N}}$ n'est pas forcément $\mathbf{\Sigma}^0_\xi$ vu comme sous-ensemble de X.

— Exercice 3 : On utilise la manière usuelle de montrer qu'un ensemble est borélien en interprétant des $\forall n$ comme intersections dénombrables, et des $\exists n$ comme réunion dénombrable. Un exemple plus difficile d'ensemble $\mathbf{\Pi}^0_3$ est celui des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ dans $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ (cf. [Kec95, 11.B]).

— Exercice 6, question 4 : On pourra remarquer qu'une suite (n_k) d'entiers est entièrement déterminée par les ensembles $A_n := \{k \in \mathbb{N} : u_n \leqslant k\}$ et qu'une suite tend vers l'infini ssi les A_n sont tous finis. (attention cependant, il faut une réduction depuis l'ensemble des suites de parties vers l'ensemble des suites ; ce que nous venons de décrire réduit les suites d'entiers tendant vers l'infini aux suites de parties finies, mais on peut trouver une sorte d'inverse à cette réduction !).

Références

[Kec95] Alexander S. Kechris. *Classical descriptive set theory*, volume 156 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1995.