Moyennabilité

François Le Maître - f.lemaitre@math.univ-paris-diderot.fr

Exercice 1. Actions moyennables.
Soit X un ensemble discret, soit $\Gamma \curvearrowright X$ une action, on dit que l'action est **moyennable** si pour tout $S \Subset \Gamma$ et tout $\epsilon > 0$, il existe $F \Subset X$ tel que pour tous $\gamma \in S$,

$$\frac{|F \triangle \gamma F|}{|F|} < \epsilon.$$

Remarquons qu'un groupe Γ est moyennable ssi son action sur lui même par translation à gauche est moyennable.

1. Montrer qu'une action $\Gamma \curvearrowright X$ est moyennable ssi pour tous $S \Subset \Gamma$ et tout $\epsilon > 0$, il existe $f \in \mathrm{Prob}(X)$ telle que
$$\|f - \gamma \cdot f\|_1 < \epsilon,$$
où $\Gamma \curvearrowright \ell^1(X)$ par $\gamma \cdot f(x) = f(\gamma^{-1}x)$.
2. Montrer que si Γ est moyennable, alors toutes ses actions transitives sont moyennables. On pourra utiliser la condition précédente et pousser en avant des mesures de probabilité.
3. En déduire que tout quotient d'un groupe moyennable est moyennable.
4. Montrer que si $\Gamma \curvearrowright X$ est libre, alors Γ est moyennable ssi l'action est moyennable. On pourra identifier l'action à une action sur des copies disjointes de Γ.
5. En déduire que tout sous-groupe d'un groupe moyennable est moyennable.

Exercice 2. Action transitive moyennable avec stabilisateur moyennable.

1. Montrer que $\Gamma \curvearrowright X$ est moyennable ssi pour tout $S \Subset \Gamma$, tout $\epsilon > 0$ et tout $F \Subset X$, il existe $F' \subseteq F$ tel que $|F'| > (1-\epsilon)|F|$ et $SF' \subseteq F$.
2. Soit $\Lambda \leqslant \Gamma$. Montrer que si Λ est moyennable et $\Gamma \curvearrowright \Gamma/\Lambda$ est moyennable, alors Γ est moyennable. On pourra commencer par le cas où $\Gamma = \Lambda \times \Lambda'$. Pour le cas général, on commencera par prendre $F \subseteq \Gamma/\Lambda$ presque S-invariante que l'on écrira $F = \{g\Lambda : g \in S'\}$ et on pourra considérer un sous-ensemble F' de Λ qui soit $S'^{-1}SS'$-presque invariant et considérer $F'' = \{gF' : g \in S'\}$.
3. En déduire que si Λ est un sous groupe distingué de Γ, alors Γ est moyennable ssi Λ et Γ/Λ le sont.

Exercice 3. Croissance sous-exponentielle.
Un groupe Γ de type fini est dit à **croissance sous-exponentielle** s'il existe une partie génératrice finie S de Γ telle que

$$\liminf_{n\to+\infty} \frac{\log |B_S(e,n)|}{n} = 0,$$

où $B_S(e,n)$ est la boule fermée de rayon n pour la distance de graphe sur le graphe de Cayley de Γ pour la partie génératrice S.

1. Montrer que si Γ est à croissance sous-exponentielle, alors Γ est moyennable. On pourra raisonner par l'absurde.
2. Montrer que le groupe de l'allumeur de réverbère est un exemple de groupe moyennable qui n'est pas à croissance sous-exponentielle. Ce dernier est défini comme le produit semi direct $\mathcal{P}_f(\mathbb{Z}) \rtimes \mathbb{Z}$, où $\mathcal{P}_f(\mathbb{Z})$ est le groupe des parties finies de $\mathbb{Z}$ muni de la différence symmétrique (et s'identifie donc à $\bigoplus_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$), sur lequel $\mathbb{Z}$ agit par translation. On pourra considérer comme système de générateurs le générateur 1 de $\mathbb{Z}$ et l'élément $\{0\}$ de $\mathcal{P}_f(\mathbb{Z})$ et montrer que la boule de rayon $2n$ contient au moins 2^n éléments.