Coût et arborages

François Le Maître - f.lemaitre@math.univ-paris-diderot.fr

Exercice 1. Retour sur l'induction.
Soit $G = (V, E)$ un graphe dénombrable connexe, soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une énumération des arêtes. Soit $A \subseteq V$, en utilisant un ordre bien choisi sur les chemins, montrer qu'il existe un sous graphe $\Psi \subseteq E$ tel que tout élément de $V \setminus A$ est relié via Ψ à un unique élément de A. Montrer que Ψ est une forêt (pas de cycles). Utiliser Ψ pour faire glisser les arêtes de $E \setminus \Psi$ dans A, et montrer que le graphe obtenu en restriction à A est connexe.

Exercice 2. Arborages de coût 1**.**
Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence apériodique admettant un arborage Ψ de coût 1, on se propose de montrer que Ψ est alors nécessairement hyperfinie. Pour ce faire, on va élaguer progressivement Ψ, c'est-à-dire retirer les sommets de degré 1.

1. On définit $A = \{x \in X : \deg_\Psi(x) = 1\}$. Montrer qu'en restriction à $X \setminus A$, le coût normalisé de Ψ est 1.
2. Construire par récurrence une suite croissante (A_n) de sous-ensembles de X telle que en restriction à $B := X \setminus \bigcup_n A_n$, Ψ est de coût normalisé 1 mais tous les sommets sont de degré $\geqslant 2$.
3. En déduire que tous les sommets de $\Psi_{\restriction B}$ ont degré 2, et montrer que pour tout $x \in B$, le graphe $\Psi_{\restriction B}[x]$ est isomorphe au graphe de Cayley de $(\mathbb{Z}, \{1\})$.
4. Conclure que $\mathcal{R}_B$ est nécessairement μ-hyperfinie, puis que $\mathcal{R}$ également. On pourra adapter la preuve que toute action de $\mathbb{Z}$ est μ-hyperfinie.
5. Application : montrer que le coût des actions libres de $\mathbb{Z} \times \mathbb{F}_2$ n'est jamais atteint.

Exercice 3. Exemples d'arborages.

1. Montrer que $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est de coût 3/2.
2. Montrer que $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est de coût 1.
3. Montrer qu'il existe action libre de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ admetantt un graphage $\mathcal{G}$ dont toutes les composantes sont isomorphes au graphe de Cayley de $(\mathbb{Z}, \{1\})$, mais qui ne peut s'écrire de la forme $\{(x, T^{\pm 1}(x) : X \in X\}$ pour un $T \in \mathrm{Aut}(X, \mu)$.

Indication : Soient a et b les générateurs de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \langle a, b | a^2 = b^2 = 1\rangle$. Considérer une action Bernoulli de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, et montrer que ab est ergodique. Le graphage $\mathcal{G} = \{(x, ax) : x \in X\} \cup \{(x, bx) : x \in X)\}$ de l'action donné par les générateurs a et b est isomorphe au graphe de Cayley de $(\mathbb{Z}, 1)$. Montrer que si $\mathcal{G} = \{(x, T^{\pm 1}(x)) : x \in X\}$, l'ensemble $A = \{x \in X : T^2(x) = ab(x)\}$ est ab-invariant, et que $a(A) = X \setminus A$, ce qui contredira l'ergodicité de ab.