DM2 - à rendre le 20 novembre

Exercice 1. Va-et-vient.

Soit $\mathcal{L}$ un langage dénombrable. Soit T une théorie, soient M et N deux modèles de T. Un **isomorphisme partiel** entre M et N est un isomorphisme $\varphi : M' \to N'$ entre deux sous-structures M' et N'. Deux $\mathcal{L}$-structures M et N sont **en va-et-vient** s'il existe une famille $\mathcal{F}$ non vide d'isomorphismes partiels entre M et N qui est **karpienne**, c'est-à-dire telle que

— Pour tout $a \in M$, tout isomorphisme partiel $f \in \mathcal{F}$ se prolonge en un isomorphisme partiel $\tilde{f} \in \mathcal{F}$ dont le domaine contient a.

— Pour tout $b \in N$, tout isomorphisme partiel $f \in \mathcal{F}$ se prolonge en un isomorphisme partiel $\tilde{f} \in \mathcal{F}$ dont l'image contient b.

1. Montrer que si M et N sont en va-et-vient, alors ils ont la même théorie. On pourra montrer par induction sur les formules que les éléments de $\mathcal{F}$ préservent les formules : pour tout $\bar{a} \in M^n$, toute formule φ, on a $M \models \varphi(\bar{a})$ ssi $N \models \varphi(f(\bar{a}))$. En déduire que si tous les modèles de T sont en va-et-vient alors T est complète.
2. Montrer que si T est une théorie dont les modèles satisfont que les isomorphismes partiels entre sous-structures finiment engendrées forment une famille karpienne, alors tous les modèles dénombrables de T sont isomorphes. On dit que T est $\aleph_0$-catégorique.
3. Montrer que si T est $\aleph_0$-catégorique et tous ses modèles sont infinis, alors T est complète. On pourra utiliser le théorème de Löwenheim-Skolem descendant.
4. Montrer que les ordres totaux denses sans extrémités sont en va-et-vient, et que leur théorie est $\aleph_0$-catégorique et complète.

Exercice 2. Théories héréditaires.

Soit $\mathcal{L}$ un langage.

1. Soient $c_1, ...c_n$ des symboles de constantes n'appartenant pas à $\mathcal{L}$, soit $\varphi(x_1, ..., x_n)$ une $\mathcal{L}$-formule et soit T une théorie. Montrer que $T \models \forall \bar{x} \varphi(\bar{x})$ ssi $T \cup \{\neg\varphi(\bar{c})\}$ n'est pas consistante.
2. Si T est une théorie, on note $T^\forall$ l'ensemble des conséquences universelles de T, c'est-à-dire des énoncés universels φ tels que $T \models \varphi$. Montrer que les modèles de $T^\forall$ sont exactement les sous-structures de modèles de T.
3. Une théorie T est dite héréditaires si toutes les sous-structures de ses modèles satisfont T. Montrer qu'une théorie T est héréditaire ssi elle est équivalente à $T^\forall$ (on parle en fait de théorie universelle).
4. Donner une axiomatisation de la classe des groupes dans le langage $(e, \cdot)$ et montrer qu'elle n'est pas héréditaire. Que se passe-t-il si on ajoute le symbole ${}^{-1}$?

Exercice 3. Graphe aléatoire.

Soit le langage $\mathcal{L} = \{R\}$ où R est une relation binaire. On définit un **graphe** comme une $\mathcal{L}$-structure où l'interprétation de R est symétrique et irréflexive.

1. Donner un $\mathcal{L}$-énoncé dont les modèles sont les graphes.
2. On dit qu'un graphe G satisfait la **propriété d'extension** si pour tous $E, F \subseteq G$ finis disjoints, il existe $x \in G$ tel que pour tous $y \in E$ et tous $z \in F$, on ait xRy et $x \not R z$. Donner une théorie T_{gal} dont les modèles forment l'ensemble des graphes avec la propriété d'extension.
3. On admet que T_{gal} est consistante (cf. question 7). Montrer que T_{gal} a un modèle dénombrable.
4. Montrer que si H est un graphe dénombrable et G est un modèle de T_{gal}, alors H se plonge dans G.
5. Montrer que tous les modèles dénombrables de T_{gal} sont isomorphes. L'unique modèle de T_{gal} à isomorphisme près s'appelle le *graphe aléatoire*.

6. En déduire que T_{gal} est complète.
7. (Questions bonus) On va montrer de deux manières différentes (probabiliste puis topologique) que T_{gal} admet un modèle dénombrable, et est donc consistante.
   (a) On considère l'ensemble $\mathcal{E}$ des paires d'entiers (que l'on voit comme l'ensemble des arêtes du graphe complet dénombrable). On munit $\{0,1\}^{\mathcal{E}}$ de la mesure produit $\mu := \prod_{e \in E}(1/2(\delta_0 + \delta_1))$. Étant donné $\alpha = (\alpha_e)_{e \in E} \in \{0,1\}^{\mathcal{E}}$, on définit une relation de graphe R_α sur $\mathbb{N}$ en posant $(x,y) \in R_\alpha$ ssi $\alpha_{\{x,y\}} = 1$.
      i. Montrer qu'étant donnés $E, F \subseteq \mathbb{N}$ finis disjoints, l'ensemble des $\alpha \in \{0,1\}^{\mathcal{E}}$ tels que (il existe $x \in \mathbb{N}$ satisfaisant : pour tout $y \in E$ et tous $z \in F$, on ait $xR_\alpha y$ et $x \not R_\alpha z$) est de mesure 1.
      ii. En déduire l'existence du graphe aléatoire.
      iii. Que se passe-t-il si pour $p \in]0,1[$ on remplace μ par $\mu_p := \prod_{e \in E}(p\delta_0 + (1-p)\delta_1)$?
   (b) On considère l'ensemble $\mathcal{R} := \{R \subseteq \mathbb{N}^2 : R \text{ est réflexive et antisymétrique}\} \subseteq \{0,1\}^{\mathbb{N}^2}$.
      i. Montrer que $\mathcal{R}$ est compact pour la topologie induite.
      ii. Montrer qu'étant donnés $E, F \subseteq \mathbb{N}$ finis disjoints, l'ensemble des $R \in \mathcal{R}$ tels que (il existe $x \in \mathbb{N}$ satisfaisant : pour tout $y \in E$ et tous $z \in F$, on ait xRy et $x \not R z$) est ouvert.
      iii. Le théorème de Baire dit que dans un ensemble compact toute intersection dénombrable d'ouverts denses est dense (donc en particulier non vide). Déduire du théorème de Baire l'existence du graphe aléatoire.