TD 2 - Cardinalité, axiome du choix

Exercice 1. Échauffement.
Soient E, F et G des ensembles. En exhibant des bijections naturelles, montrer que :

1. $\{0,1\}^E \approx \mathcal{P}(E)$;
2. $(E \times F)^G \approx E^G \times F^G$;
3. $E^{(F\times G)} \approx \left(E^F\right)^G$;
4. (en supposant que F et G sont disjoints) $E^{(F\sqcup G)} \approx E^F \times E^G$.

Solution de l'exercice 1.

1. On associe à une partie de E sa fonction caractéristique.
2. Étant donnée $\varphi \in (E\times F)^G$ on lui associe $(\pi_E\varphi, \pi_F\varphi)$ et récirpoquement étant données $\varphi_1 \in E^G$ et $\varphi_2 \in F^G$ ont leur associe $g \mapsto (\varphi_1(g), \varphi_2(g))$. On vérifie aisément que ces applications sont bien inverses l'une de l'autre.
3. On associe à $\varphi \in E^{(F\times G)}$ la fonction $g \mapsto \varphi(\cdot, g)$, et réciproquement on associe à $\varphi \in (E^F)^G$ la fonction $(f, g) \mapsto \varphi(g)(f)$. On vérifie aisément que ces applications sont bien inverses l'une de l'autre.
4. On associe à $\varphi \in E^{F\sqcup G}$ ses restrictions respectives à F et G, et réciproquement on recolle des applications.

Exercice 2. Des ensembles de suites entières.
On définit les ensembles suivants :

$$\begin{aligned} S_1 &= \{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid \exists m \in \mathbb{N}\, \forall n \in \mathbb{N}\; n \geqslant m \Rightarrow f(n) = 0\} \\ S_2^M &= \{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}\, f(n) < M\} \qquad \text{où } M \in \mathbb{N} \\ S_3^M &= S_1 \cap S_2^M \end{aligned}$$

1. Décrire ce que représentent les ensembles ci-dessus.
2. Ces ensembles sont-ils finis ? dénombrables ? non dénombrables ?

Solution de l'exercice 2.

1. S_1 est l'ensemble des suites d'entiers naturels nulles à partir d'un certain rang, S_2^M est l'ensemble des suites d'entiers naturels bornées strictement par M.
2. S_1 est dénombrable infini : par définition $S_1 = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}\; n \geqslant m \Rightarrow f(n) = 0\}$. Notons $S_1^m = \{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}\; n \geqslant m \Rightarrow f(n) = 0\}$, alors S_1^m est en bijection avec $\mathbb{N}^m$ via l'application qui à une suite associe ses m premiers termes. Ainsi S_1 est une réunion dénombrable d'ensembles dénombrables infinis, donc S_1 est dénombrable infini.

   Pour $M = 0$, $S_2^0 = \emptyset$ est fini, pour $M = 1$, $S_2^M = \{0\}$ est également fini. Remarquons que pour $M \geqslant 2$ on a $S_2^2 \subseteq S_2^M$, or $S_2^2 = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ donc d'après le cours S_2^2 est infini non dénombrable, et il en est donc de même pour S_2^M pour $M \geqslant 2$.

   Pour tout M l'ensemble S_3^M est dénombrable car contenu dans un ensemble fini. Pour $M \leqslant 1$ S_3^M est fini car contenu dans un ensemble fini. Pour $M \geqslant 2$ on a $S_3^2 \subseteq S_3^M$, or S_3^2 est infini car $\mathbb{N}$ s'injecte dans S_3^2 via $n \mapsto \chi_{\{n\}}$, ainsi S_3^M est dénombrable infini.

Exercice 3. Bons ordres plongeables dans $\mathbb{R}$.
Si $(E, <)$ et $(F, <)$ sont deux ensembles totalement ordonnés, une application $f : E \to F$ est appelé un *plongement* (d'ensembles totalement ordonnés) si pour tous $x, y \in E$ avec $x < y$ on a $f(x) < f(y)$. (Noter que f est automatiquement injective.) On écrit alors $f : (E, <) \hookrightarrow (F, <)$.

1. Montrer que tout ordre total dénombrable se plonge dans $(\mathbb{Q},<)$.
2. Quels sont les bons ordres qui admettent un plongement dans $(\mathbb{R},<)$?

Solution de l'exercice 3.

1. Soit $(X,<)$ totalement ordonné dénombrable, soit $\beta : \mathbb{N} \to X$ surjective. Pour $i \in \mathbb{N}$ on pose $B_i = \{\beta(0), ..., \beta(i)\}$. On va construire par récurrence sur $i \in \mathbb{N}$ des fonctions strictement croissantes $f_i : B_i \to \mathbb{Q}$ telles que $f_i = f_{i+1\restriction B_i}$.
   On commence par poser $f_0(\beta(0)) = 0$, puis, f_i étant définie, si $\beta(i+1) \in B_i$ on pose $f_{i+1} = f_i$ et sinon, on commence par ordonner B_i de manière croissante : soient $x_0, ..., x_n$ tels que $B_i = \{x_0, ..., x_n\}$ et $x_0 < x_1 < ... < x_n$, comme f_i est strictement croissante on a $f_i(x_0) < f_i(x_1) < ... < f_i(x_n)$. On définit f_{i+1} par $f_{i+1}(x) = f_i(x)$ si $x \in B_i$, et sinon c'est que $x = \beta(i+1)$ et on distingue trois cas :
   — Si $x < x_0$ on pose $f_{i+1}(x) = f_i(x_0) - 1$
   — Si $x > x_n$ on pose $f_{i+1}(x) = f_i(x_n) + 1$
   — Dans les autres cas soit $k \in \{0, ..., n-1\}$ tel que $x_k < x < x_{k+1}$, alors on pose $f_{i+1}(x) = \frac{f_i(x_k)+f_i(x_{k+1})}{2}$.
   Par construction f_{i+1} est bien strictement croissante. On pose alors $f = \bigcup_i f_i$, alors f est le plongement voulu.
2. D'après la première question, comme tous les bons ordres sont totaux et comme $(\mathbb{Q},<)$ se plonge dans $(\mathbb{R},<)$, tous les bons ordres dénombrables se plongent dans $(\mathbb{R},<)$. On va montrer que ce sont les seuls !
   En effet, soit $(X,<)$ un bon ordre se plongeant dans $(\mathbb{R},<)$, alors en identifiant X à son image dans $\mathbb{R}$ via le plongement on peut supposer $X \subseteq \mathbb{R}$ muni de l'ordre induit par l'ordre usuel. Soit X_0 l'ensemble des éléments non maximums de X, alors $|X| \leqslant |X_0| + 1$. On va montrer que X_0 est dénombrable.
   Pour cela, souvenons que d'après le TD1, tout élément de X_0 a un successeur que l'on note $S(x)$, qui vérifie que l'intervalle $]x, S(x)[\cap X$ est vide. Alors on voit que pour $x \neq y \in X_0$, les intervalles $]x, S(x)[$ et $]y, S(y)[$ sont disjoints : en effet si $x < y$ on a $S(x) \leqslant y$ tandis que si $y < x$ on a $S(y) \leqslant x$, ce qui rend bien ces deux intervalles disjoints. Mais une famille disjointe d'ouverts de $\mathbb{R}$ est au plus dénombrable : en effet on peut associer à chaque ouvert un rationnel lui appartenant, et comme les ouverts sont disjoints cette fonction est injective, or les rationnels sont dénombrables. Ainsi X_0 est dénombrable et X l'est donc également.

Exercice 4. Quelques conséquences de l'axiome du choix.
Dans cet exercice, on admet l'axiome du choix.

1. Rappeler pourquoi tout espace vectoriel admet une base.
2. Montrer que tout groupe non-abélien G contient un sous-groupe maximal abélien (c'est-à-dire un sous-groupe abélien A qui n'est contenu strictement dans aucun sous-groupe abélien de G).
3. Montrer que si G est un groupe finiment engendré alors tout sous-groupe propre de G est contenu dans un sous-groupe propre maximal de G.
4. Soit R un anneau commutatif unitaire et $I \subseteq R$ un idéal (propre) de R. Montrer que I est contenu dans un idéal maximal (propre) de R.

Solution de l'exercice 4. Commençois par remarquer le lemme suivant.

Lemme. Dès que $(A_i)_{i\in I}$ est une famille totalement ordonnée pour l'inclusion de parties d'un ensemble E, alors toute partie finie de $A := \bigcup_{i\in I} A_i$ est contenue dans un des A_i.

Démonstration. Soit $F = \{x_1, ..., x_n\} \subseteq A$ une partie finie de A. Soient $i_1, ..., i_n$ tels que $x_1 \in A_{i_1}, ..., x_n \in A_{i_n}$, alors comme tout ensemble totalement ordonné fini a un maximum il existe $k \in \{1, ..., n\}$ tel que A_{i_k} contienne $A_{i_1} \cup ... \cup A_{i_n}$ et donc $\{x_1, ..., x_n\} \subseteq A_{i_k} \subseteq A$. □

On dit qu'un ensemble ordonné est *inductif* si toute famille totalement ordonnée de X est majorée. Le lemme de Zorn dit donc que tout ensemble ordonné inductif non vide contient un élément maximal.

1. Soit V un K-espace vectoriel. L'ensemble X des sous-ensembles libres de V est stable par réunion sur une famille totalement ordonnée car un sous-ensemble est libre ssi toutes ses parties finies sont libres, et donc si $(A_i)_{i\in I}$ est totalement ordonnée dans X, sa réunion est dans X d'après le lemme ci-dessus. Donc X est inductif pour l'inclusion. De plus X est non vide car il contient $\emptyset$. On peut donc appliquer le lemme de Zorn et trouver une partie libre maximale, qui est donc une base d'après un résultat d'algèbre linéaire.
2. Soit X l'ensemble des sous-groupes abéliens de G, alors X est non vide car il contient le sous-groupe trivial. Soit $(H_i)_{i\in I}$ une famille totalement ordonnée d'éléments de X, soit $H = \bigcup_i H_i$. Alors H est un sous-groupe car pour tous $g, h \in H$, on a par le lemme ci-dessus un i tel que $g, h \in H_i$ donc $gh^{-1} \in H_i \subseteq H$. De plus comme chaque H_i est abélien le même raisonnement montre que H est abélien. Donc X est inductif non vide. Le lemme de Zorn nous fournit alors un sous-groupe abélien maximal de G.
3. Soit X l'ensemble des sous-groupes propres de G, alors X est non vide car il contient le sous-groupe trivial. Soit $(H_i)_{i\in I}$ une famille totalement ordonnée d'éléments de X, soit $H = \bigcup_i H_i$. Alors H est un sous-groupe par le même raisonnement que précédemment. De plus H est propre car sinon il contient une partie finie qui engendre G (car G de type fini), or par le lemme cette partie est contenue dans un H_i, ce qui contredit que H_i soit propre. Ainsi X est inductif non vide. Le lemme de Zorn nous fournit alors un sous-groupe propre maximal de G.

   Remarque. Un exemple de groupe dénombrable sans sous-groupe propre maximal est donné par le groupe additif des fractions dyadiques : si H est un sous-groupe propre, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que H ne contient pas $1/2^n$, mais on remarque que le groupe engendré par $\{1/2^n\} \cup H$ ne contient pas $1/2^{n+1}$.
4. Soit X l'ensemble des idéaux de l'anneau R, alors X est non vide car il contient $\{0\}$. Soit $(I_i)_{i\in I}$ une famille totalement ordonnée d'éléments de X, soit $I = \bigcup_i I_i$. Alors I est un idéal : en effet par le même argument qu'à la question 2 on voit que I est un sous groupe additif, et si $x \in I$ et $a, \in A$, on prend i tel que $x \in I_i$, alors $ax \in I_i \subseteq I$ donc I est bien un idéal. Ainsi X est inductif non vide. Le lemme de Zorn nous fournit alors un idéal maximal de A.

Exercice 5. Cardinalité des K-espaces vectoriels et isomorphisme.
On admet l'axiome du choix.

1. Montrer que si X est infini, alors l'ensemble des parties finies de X a la même cardinalité que X.
2. Soit K un corps et X un ensemble infini. Déduire de la question précédente le cardinal de l'espace vectoriel $K^{\bigoplus X}$ des fonctions $f : X \to K$ telles qu'il existe $F \subseteq X$ fini vérifiant pour tout $x \notin F$, $f(x) = 0$.
3. Montrer que si K est un corps dénombrable, deux K-espaces vectoriels de dimension infinie sont isomorphes si et seulement si ils ont la même cardinalité.

Solution de l'exercice 5.

1. On note $\mathcal{P}_f(X)$ l'ensemble des parties finies de X. On a $|X| \leqslant |\mathcal{P}_f(X)|$ via $x \mapsto \{x\}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note $\mathcal{P}_n(X)$ l'ensemble des parties de X à n éléments. Alors $\mathcal{P}_f(X) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{P}_n(X)$. Or pour tout $n \geqslant 1$, on a une surjection $X^n \to \mathcal{P}_n(X)$ donnée par $(x_1, ..., x_n) \mapsto \{x_1, ..., x_n\}$, et donc $\mathcal{P}_n(X) \leqslant |X|^n = |X|$ car X est infini. On en conclut que $|\mathcal{P}_f(X)| \leqslant |\mathbb{N}|\,|X| = |X|$ car X est infini, donc $|\mathcal{P}_f(X)| = |X|$.
2. Définissons pour $f \in K^X$ le support de f, noté supp f par
$$\operatorname{supp} f = \{x \in X : f(x) \neq 0\}.$$
   Notons également $V_F = \{f \in K^X : \operatorname{supp} f \subseteq F\}$ Alors par définition $K^{\oplus X} = \bigcup_{F\in\mathcal{P}_f(x)} V_F$. Or pour chaque $F \in \mathcal{P}_f(X)$, l'application $V_F \to K^F$ qui à f associe sa restriction à F est injective par définition, donc $|V_F| = |K|^{|F|}$. Remarquons que X s'injecte dans $K^{\oplus X}$ en associant à chaque $x \in X$ la fonction $\delta_x : x' \mapsto 1$ si $x' = x$ et 0 sinon, tandis que K s'injecte en choisissant $x_0 \in X$ et en associant à $k \in K$ l'élément $k\delta_{x_0}$. Ainsi $\max(|X|, |K|) \leqslant \left|K^{\oplus X}\right|$.

Maintenant si K est fini on a pour tout $F \in \mathcal{P}_f(X)$ que V_F est fini donc $|V_F| \leqslant |X|$, or $K^{\oplus X} = \bigcup_{F\in\mathcal{P}_f(x)} V_F$ donc $\left|^{\oplus X}\right| \leqslant |X|\,|X| = |X| = \max(|X|\,, |K|)$.
Dans le cas où K est infini, pour tout F non vide $|V_F| = |K|^{|F|} = |K|$ et donc $\left|K^{\oplus X}\right| \leqslant |X|\,|K| \leqslant \max(|X|\,, |K|)$.
Dans les deux cas on a $\max(|X|\,, |K|) \leqslant \left|K^{\oplus X}\right| \leqslant \max(|X|\,, |K|)$ et donc $\left|K^{\oplus X}\right| = \max(|X|\,, |K|)$

3. Si deux espaces vectoriels sont isomorphes alors ils ont la même cardinalité. Réciproquement, si on a deux espaces vectoriels dont les bases ont le même cardinal alors ils sont isomorphes. Ainsi si K est dénombrable et que l'on a deux espaces vectoriels de même cardinal, la question précédente nous assure que leurs bases sont de même cardinal (en effet si $\mathcal{B}$ est une base d'un espace vectoriel V alors V est isomorphe à $K^{\oplus\mathcal{B}}$) et donc qu'ils sont isomorphes.

Exercice 6. Calculs de cardinalité.

1. Soit $\mathcal{S} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites réelles. Montrer que $\mathcal{S} \approx \mathbb{R}$.
2. Montrer que $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} \approx \{0,1\}^{\mathbb{R}}$.
3. Déterminer le cardinal de l'ensemble des ouverts de $\mathbb{R}$, puis de l'ensemble des boréliens de $\mathbb{R}$.
4. Soit $C_0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que $C_0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \approx \mathbb{R}$.
5. (Plus difficile.) Soit $\mathrm{Mon}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions monotones de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que $\mathrm{Mon}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \approx \mathbb{R}$. [*Indication* : Montrer d'abord que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est croissante, alors l'ensemble $\{a \in \mathbb{R} \mid \sup_{x<a} f(x) < \inf_{x>a} f(x)\}$ est dénombrable ou fini.]

Solution de l'exercice 6.

1. On a $\mathbb{R} \approx \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ donc $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \approx (\{0,1\}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}} \approx \{0,1\}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \approx \{0,1\}^{\mathbb{N}} \approx \mathbb{R}$.
2. $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} \approx \{0,1\}^{(\mathbb{N}\times\{0,1\}^{\mathbb{N}})} \approx \{0,1\}^{\{0,1\}^{\mathbb{N}}} \approx \{0,1\}^{\mathbb{R}}$.
3. Soit (U_n) une base dénombrable d'ouverts de $\mathbb{R}$, alors on a une surjection de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ sur l'ensemble des ouverts via $A \mapsto \bigcup_{n\in A} U_n$. On a donc que le cardinal des ouverts est au plus $\left|\{0,1\}^{\mathbb{N}}\right|$. Mais on a une injection de $\mathbb{R}$ dans l'ensemble des ouverts en associant à x l'ouvert $]x-1, x+1[$. Ces deux ensembles ont donc le même cardinal d'après le théorème de Cantor-Bernstein, donc $|R| = |\{\text{ouverts de } \mathbb{R}\}|$.
   Pour l'ensemble des boréliens, il faut utiliser une induction sur ω_1 pour montrer que son cardinal est celui de l'ensemble des réels, chose qui est hors de portée.
4. Un fonction continue est déterminée par sa restriction à un sous ensemble dense. Comme $\mathbb{R}$ est séparable, on en déduit que le cardinal de l'ensemble des fonctions continues est au plus $\left|\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right| = |\mathbb{R}|$. Mais il y a clairement au moins $|\mathbb{R}|$ fonctions continues (les fonctions constantes), donc $C_0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \approx \mathbb{R}$.