TD 3 - Calcul propositionnel

On fixe un ensemble $\mathcal{P} = \{p_i \mid i \in I\}$, où les p_i sont des *variables propositionnelles* (elles prennent comme valeurs « vrai » ou « faux »).
Les *formules du calcul propositionnel* sont des mots sur l'alphabet $\mathcal{P} \cup \{\neg, \top, \bot, \wedge, \vee, \Leftrightarrow, \Rightarrow, (,)\}$, formés selon les règles (inductives) suivantes :

— p_i est une formule pour tout i,
— $\bot$ et $\top$ sont des formules ;
— si F et G sont des formules, alors $\neg F$, $(F \wedge G)$, $(F \vee G)$, $(F \Leftrightarrow G)$ et $(F \Rightarrow G)$ aussi.

Soit $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}$ l'ensemble des formules du calcul propositionnel. On identifie 0 avec « faux » et 1 avec « vrai ». Une *distribution de valeurs de vérité (d.v.v.)* est une application $\delta : \mathcal{P} \to \{0, 1\}$. Par induction sur la construction de F, on définit $\delta \models F$, lu δ *est modèle de* F ou F *est satisfaite par* δ, comme suit :

— pour $p_i \in \mathcal{P}$, on pose $\delta \models p_i$ ssi $\delta(p_i) = 1$;
— $\delta \models \top$ et $\delta \not\models \bot$
— $\delta \models \neg F$ ssi $\delta \not\models F$;
— $\delta \models (F \wedge G)$ ssi $\delta \models F$ et $\delta \models G$;
— on procède de manière analogue pour $(F \vee G)$, $(F \Leftrightarrow G)$ et $(F \Rightarrow G)$, en utilisant les tables de vérité des connecteurs binaires $\vee, \Leftrightarrow$ et $\Rightarrow$.

On écrit $F = F(q_1, \ldots, q_n)$ si les q_i sont des variables distinctes et si toutes les variables ayant une occurrence dans F figurent parmi les q_i.
Une *tautologie (du calcul propositionnel)* est une formule $F \in \mathcal{P}$ telle que $\delta \models F$ pour toute d.v.v. δ.
Deux formules F et G sont *(logiquement) équivalentes* si $(F \Leftrightarrow G)$ est une tautologie.

Exercice 1. Tautologies.
Soient M, N et L des formules propositionnelles. Montrer que les formules suivantes sont des tautologies :

— $F_1 = M \Rightarrow (N \Rightarrow M)$
— $F_2 = ((M \Rightarrow N) \Rightarrow M) \Rightarrow M$
— $F_3 = (M \Rightarrow N) \Rightarrow ((M \Rightarrow (N \Rightarrow L)) \Rightarrow (M \Rightarrow L))$
— $F_4 = (\neg M \Rightarrow \neg N) \Rightarrow (N \Rightarrow M)$

Exercice 2. Formules à équivalence près.

1. Donner une liste complète des formules $F(p_0, p_1)$ à équivalence près.
2. Déterminer le cardinal de l'ensemble des formules en les variables propositionnelles $p_0, \ldots, p_{n-1}$ à équivalence près.

Exercice 3. Forme normale disjonctive / conjonctive.
Soit F une formule propositionnelle.

1. Montrer que F est équivalente à une formule de la forme
$$\bigvee_{i=1}^{m} \bigwedge_{j=1}^{k_i} L_{ij},$$
où L_{ij} est égale à p ou à $\neg p$, pour $p \in \mathcal{P}$. On l'appelle une *forme normale disjonctive* de F. On pourra s'appuyer sur l'exercice précédent.
2. Montrer que F est équivalente à une formule de la forme $\bigwedge_{i=1}^{m} \bigvee_{j=1}^{k_i} L_{ij}$, où L_{ij} est égale à p ou à $\neg p$, pour $p \in \mathcal{P}$. On l'appelle une *forme normale conjonctive* de F.

Exercice 4. Théorème de compacité du calcul propositionnel.

Soit $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}$ l'ensemble des formules propositionnelles construites sur un ensemble infini $\mathcal{P}$ de variables propositionnelles.

Un ensemble de formules propositionnelles Σ est dit *satisfaisable* s'il existe une d.v.v. δ telle que $\delta \models F$ pour tout $F \in \Sigma$; il est dit *finiment satisfaisable* si toute partie finie $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ est satisfaisable. Le but de cet exercice est de montrer le théorème suivant :

Théorème : *Un ensemble $\Sigma \subseteq_{\mathcal{P}}$ de formules propositionnelles est satisfaisable si et seulement s'il est finiment satisfaisable.*

1. Un cas particulier : On dit que Σ est *complet* si pour toute variable propositionnelle $p \in \mathcal{P}$ on a $p \in \Sigma$ ou $\neg p \in \Sigma$. Montrer le théorème ci-dessus dans le cas où Σ est complet.
2. Montrer à l'aide du lemme de Zorn que tout ensemble finiment satisfaisable de formules propositionnelles est contenu dans un ensemble finiment satisfaisable et complet.
3. Conclure.
4. Montrer le théorème dans le cas où $\mathcal{P}$ est dénombrable sans utiliser le lemme de Zorn.

Exercice 5. Théorème de Ramsey fini.

Si A est un ensemble on note $\mathcal{P}_n(A)$ l'ensemble des parties de A ayant exactement n éléments. On admet le théorème suivant (connu sous le nom de théorème de Ramsey) :

Théorème A : *Pour toute application f de $\mathcal{P}_2(\mathbb{N})$ dans $\{0,1\}$ il existe un sous-ensemble infini A de $\mathbb{N}$ tel que la restriction de f à $\mathcal{P}_2(A)$ soit constante.*

Le but de l'exercice est d'utiliser le théorème de compacité du calcul propositionnel (voir l'exercice précédent) pour déduire du théorème A le résultat suivant.

Théorème B : *Pour tout entier $n \geqslant 2$, il existe un entier N tel que pour toute application f de $\mathcal{P}_2(\{0,1,\dots,N\})$ dans $\{0,1\}$ il existe une partie $A \subseteq \{0,1,\dots,N\}$ à n éléments telle que f soit constante sur $\mathcal{P}_2(A)$.*

Pour cela on considère des formules propositionnelles construites sur l'ensemble de variables $\mathcal{P} = \{p_{\{n,m\}}; \{n,m\} \in \mathcal{P}_2(\mathbb{N})\}$.

1. Soit A une partie finie de $\mathbb{N}$ ayant au moins deux éléments. Construire une formule F_A telle que si δ est une distribution de valeurs de vérité sur $\mathcal{P}$, alors $\delta \models F_A$ ssi δ est constante sur $\{p_{\{n,m\}}; \{n,m\} \in \mathcal{P}_2(A)\}$.
2. Soit $n > 1$ un entier. Montrer, en utilisant le théorème A, que l'ensemble $\{\neg F_A \ ; \ A \in \mathcal{P}_n(\mathbb{N})\}$ n'est pas satisfaisable.
3. Montrer le théorème B.
4. **Application :** On considère le jeu suivant, à deux joueurs. On place un certain nombre de points sur une feuille. Chaque joueur, à son tour, relie par un trait deux points encore non reliés, trait rouge pour le premier joueur, bleu pour le second. Le premier joueur ayant ainsi tracé un pentagone est déclaré vainqueur. Montrer que, si l'on place au départ suffisamment de points, il ne peut y avoir de partie nulle (i.e. sans vainqueur).