# TD 4 - Propriétés du premier ordre, morphismes, plongements

**Exercice 1. Ordres totaux.**

On considère les ordres stricts, dans le langage $\mathcal{L}_< = \{<\}$ :

1. Trouver un $\mathcal{L}_<$-énoncé $\varphi_1$ qui est vrai dans $(\mathbb{Z},<)$ et faux dans $(\mathbb{Q},<)$.
2. Trouver un $\mathcal{L}_<$-énoncé $\varphi_2$ qui est vrai dans $(\mathbb{Z},<)$ et faux dans $(\mathbb{N},<)$.
3. Trouver un $\mathcal{L}_<$-énoncé $\varphi_3$ qui est vrai dans $(\mathbb{N},<)$ et faux dans la somme ordonnée $(\mathbb{N},<)\oplus(\mathbb{N},<)$.
4. Trouver un $\mathcal{L}_<$-énoncé $\varphi_4$ qui est vrai dans $(\mathbb{N},<)\oplus(\mathbb{N},<)$ et faux dans le produit lexicographique $(\mathbb{N},<)\times_{lex}(\mathbb{N},<)$.

**Solution de l'exercice 1.**

1. On peut utiliser le fait que l'ordre sur $\mathbb{Z}$ est discret : une formule qui convient est : $\exists x\exists y\forall z\neg(x<z\wedge z<y)$.
2. On peut utiliser le fait que $\mathbb{Z}$ n'a pas de minimum : une formule qui convient est $\forall x\exists y(y<x)$.
3. Le deuxième zéro dans $\mathbb{N}\oplus\mathbb{N}$ n'a pas de prédécesseur, contrairement aux éléments de $\mathbb{N}$, ainsi un énoncé vrai dans $(\mathbb{N},<)$ et faux dans la somme ordonnée $(\mathbb{N},<)\oplus(\mathbb{N},<)$ est $\forall x\exists y(y<x\wedge\forall z\neg(y<z\wedge z<x))$
4. On remarque que dans $\mathbb{N}\oplus\mathbb{N}$, le deuxième zéro est le seul élément sans prédécesseur alors que dans $\mathbb{N}\times_{lex}\mathbb{N}$ il y a une infinité de tels élément. Un énoncé vrai dans $(\mathbb{N},<)\oplus(\mathbb{N},<)$ et faux dans le produit lexicographique $(\mathbb{N},<)\times_{lex}(\mathbb{N},<)$ est donc
$$\forall x_1\forall x_2\left[(\forall y(y<x_1\to\exists z(y<z\wedge z<x_1)))\wedge(\forall y(y<x_2\to\exists z(y<z\wedge z<x_2)))\right]\to x_1=x_2$$

**Exercice 2. Groupes abéliens.**

On considère le langage $\mathcal{L}_{Ab}=\{0,+,-\}$ et les $\mathcal{L}_{Ab}$–structures $\mathcal{Z}_n=(\mathbb{Z}^n,0,+,-)$ (pour $n\in\mathbb{N}$) et $\mathcal{Q}=(\mathbb{Q},0,+,-)$.

1. Trouver une $\mathcal{L}_{Ab}$-formule $\phi(x)$ telle que $\mathcal{Z}_1\models\phi[13]$ et $\mathcal{Z}_1\models\neg\phi[-17]$.
2. Montrer que pour toute $\mathcal{L}_{Ab}$-formule $\phi(x)$ on a $\mathcal{Z}_1\models\phi[13]$ si et seulement si $\mathcal{Z}_1\models\phi[-13]$.
3. Trouver un $\mathcal{L}_{Ab}$-énoncé $\psi$ qui est vrai dans $\mathcal{Z}_1$ et faux dans $\mathcal{Q}$.
4. Trouver un $\mathcal{L}_{Ab}$-énoncé $\psi_{1,2}$ qui est vrai dans $\mathcal{Z}_1$ et faux dans $\mathcal{Z}_2$.
5. Plus généralement, pour tout $m\neq n$, trouver un $\mathcal{L}_{Ab}$-énoncé $\psi_{m,n}$ qui est vrai dans $\mathcal{Z}_m$ et faux dans $\mathcal{Z}_n$.

**Solution de l'exercice 2.**

1. Remarquons que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on peut trouver à une formule à une variable libre $\varphi_n(x)$ qui dit que $x$ est divisible par $n$ : par exemple $\exists y, x=\underbrace{y+\cdots+y}_{nfois}$. Ainsi $\varphi_{13}$ convient puisque 13 est divisible par 13, contrairement à 17.
2. Dans $\mathbb{Z}$, il existe des nombres qui ne sont pas divisibles par 2, mais pas dans $\mathbb{Q}$ ; une formule qui marche est $\exists x\forall y\neg(x=y+y)$.
3. On va directement donner la réponse à la question 4. L'astuce est de voir que si $G$ est un groupe abélien, $2G=\{g+g : g\in G\}$ est un sous-groupe de $G$ et on peut alors compter le nombre d'éléments de $G/2G$ par une formule du premier ordre. En effet, pour $n\in\mathbb{N}$, la formule $\psi_n$ suivante dit que le cardinal de $G/2G$ est supérieur ou égale à $n$ :
$$\exists x_1 ... \exists x_n(\bigwedge_{i\neq j}\forall y\neg(x_i+2y=x_j))$$
Maintenant, le cardinal de $\mathbb{Z}^n/2\mathbb{Z}^n\simeq\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}^n$ est $2^n$. Si $n<m$, une formule vraie dans $\mathbb{Z}^n$ mais fausse dans $\mathbb{Z}^m$ est donc $\neg\psi_{2^m}$.

**Exercice 3. Axiomatique des corps.**
On considère le langage des anneaux $\mathcal{L}_{Rings} = \{0, 1, +, -, \times\}$.

1. Donner les axiomes de corps dans ce langage.
2. Soit $p$ un nombre premier. Donner les axiomes de corps de caractéristique $p$.
3. Axiomatiser les corps de caractéristique 0.
4. Axiomatiser les corps algébriquement clos.
5. Trouver un énoncé $\psi$ qui est vrai dans le corps des rationnels et faux dans le corps des réels.

**Exercice 4. Structures finies.**
On considère un langage $\mathcal{L}$ quelconque.

1. Donner un énoncé $\varphi_n$ tel que les structures le satisfaisant sont de cardinalité au moins $n$.
2. Donner un énoncé $\psi_n$ tel que les structures les satisfaisant sont de cardinalité exactement $n$.
3. On suppose le langage fini. Étant donnée une $\mathcal{L}$-structure $\mathfrak{M}$ finie, donner un énoncé $\varphi$ tel que $\mathfrak{N}$ satisfait $\varphi$ ssi $\mathfrak{N}$ est isomorphe à $\mathfrak{M}$.

**Solution de l'exercice 4.**

1. L'énoncé $\exists x_1 ... \exists x_n (\bigvee_{i \neq j} x_i \neq x_j)$ convient.
2. L'énoncé $\psi_n = \varphi_n \wedge \not\varphi_{n+1}$ convient.
3. Supposons $\mathcal{L} = ((R_i, m_i)_{i=1}^k, (f_j, n_j)_{j=1}^l)$ c'est à dire que pour $i = 1, ..., k$ on a un symbole de relation $R_i$ d'arité $m_i$ et pour $j = 1, ..., l$ on a un symbole de fonction $f_j$ d'arité $n_j$. On suppose que l'un des symboles est celui de l'égalité. Supposons que $\mathfrak{M}$ soit une $\mathcal{L}$-structure finie et écrivons $M = \{a_1, ..., a_n\}$. L'énoncé suivant dit que

**Exercice 5. Morphismes, plongements.**
Soient $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ des $\mathcal{L}$-structures d'ensembles de base respectifs $M$, $N$. Une application $f : M \to N$ est un *morphisme* si :

(i) Pour tout symbole de relation $R$ d'arité $n$ et tous $a_1, ..., a_n \in M$ tels que $R^M(a_1, ..., a_n)$, on a également $R^N(f(a_1), ..., f(a_n))$.

(ii) Pour tout symbole de fonction $g$ d'arité $n$ et tous $a_1, ..., a_n \in M$ on a $f(g^M(a_1, ..., a_n)) = g^N(f(a_1), ..., f(a_n))$.

On dit que $f$ est un *plongement* si c'est un morphisme tel que la condition (i) soit une équivalence : si $R^N(f(a_1), ..., f(a_n))$ alors $R^M(a_1, ..., a_n)$. Remarquons que comme notre langage comporte le symbole d'égalité, les plongements sont automatiquement injectifs. Montrer ou donner un contre-exemple :

1. Si $f$ et $g$ sont des morphismes et si $g \circ f$ est un plongement, alors $f$ est un plongement.
2. Si $f$ et $g$ sont des morphismes et si $g \circ f$ est un plongement, alors $g$ est un plongement.
3. Si $g \circ f$ et $g$ sont des plongements, alors $f$ est un plongement.
4. Si $g \circ f$ et $g$ sont des morphismes, alors $f$ est un morphisme.

**Exercice 6. Automorphismes.**
Un *automorphisme* d'une -structure $\mathfrak{M}$ est un plongement surjectif de $\mathfrak{M}$ sur elle-même. Les automorphismes de $\mathfrak{M}$ forment un groupe, noté $\mathrm{Aut}(\mathfrak{M})$.

1. Montrer que l'unique automorphisme de la structure $(\mathbb{N}, <)$ est l'identité.
2. Trouver tous les automorphismes des structures $(\mathbb{Z}, <)$ et $(\mathbb{Z}, 0, <)$.
3. Soit $\mathfrak{Q} = (\mathbb{Q}, <)$. Montrer que le cardinal de $\mathrm{Aut}(\mathfrak{Q})$ est égal à $2^{\aleph_0}$.
4. Déterminer les groupes d'automorphismes des structures $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{Q}, +, \times)$, $(\mathbb{R}, +, <)$ et $(\mathbb{R}, +, \times)$.

**Exercice 7. Préservation de formules par morphisme et plongement.**
Soient $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ des -structures de domaine $M$ et $N$, respectivement, et soit $\phi = \phi(x_1, \ldots, x_n)$ une -formule.

On dit qu'une application $f : M \to N$ *préserve* $\phi$ si pour tout $n$-uplet $(a_1, \ldots, a_n) \in M^n$ avec $\mathcal{M} \models \phi[\overline{a}]$ on a $\mathcal{N} \models \phi[f(a_1), \ldots, f(a_n)]$.

1. L'ensemble des *formules existentielles positives (e.p.)* est le plus petit ensemble de formules qui contient les formules atomiques et qui est stable par conjonction, disjonction et quantification existentielle, c'est-à-dire si $\phi$ et $\psi$ sont e.p., alors $(\phi \wedge \psi)$, $(\phi \vee \psi)$ et $\exists x \phi$ aussi, où $x$ est une variable quelconque.

   Montrer que les formules existentielles positives sont préservées par morphismes.
2. L'ensemble des *formules existentielles* est le plus petit ensemble de formules qui contient les formules sans quanteurs et qui est stable par quantification existentielle.

   Montrer que les formules existentielles sont préservées par plongements, mais pas par les morphismes.
3. Un *isomorphisme* entre deux $\mathcal{L}$-structures est un plongement surjectif. Montrer que les isomorphismes préservent toutes les formules, mais que ce n'est pas le cas des plongements.

Les plongements préservant toutes les formules sont appelés *plongements élémentaires*, et sont fondamentaux en théorie des modèles.