TD 6 - Applications du théorème de compacité

Exercice 1. Théories finiment axiomatisables.

1. Montrer que si une théorie T est finiment axiomatisable, et si A est une axiomatisation de T, alors A contient une axiomatisation finie de T.
2. Soit X est un ensemble, on considère l'ensemble $\mathcal{P}_f(X)$ des parties finies de X. Montrer que l'ensemble
$$\mathcal{F} = \{A \subseteq \mathcal{P}_f(X) : \exists Y \in \mathcal{P}_f(X), \{B \in \mathcal{P}_f(X) : A \subseteq B\}\}$$
est un filtre sur $\mathcal{P}_f(X)$.
3. Montrer qu'une théorie T est finiment axiomatisable ssi la classe des $\mathcal{L}$-structures $\mathfrak{M}$ qui ne sont *pas* des modèles de T est stable par ultraproduit.

Solution de l'exercice 1.

1. Commencer par remarquer que si on est finiment axiomatisable, on est axiomatisable par un énoncé (la conjonction des axiomes). Soit φ un énoncé qui axiomatise T, si φ n'est conséquence d'aucune partie finie de A alors par compactié $\neg\varphi \cup A$ est cohérente, contradiction.
2. C'est du cours (cf. preuve du théorème de Los)
3. C'est également une conséquence du théorème de compacité. Dans un sens si T est axiomatisée par φ, alors ne pas être modèle de T c'est être modèle de $\neg\varphi$ donc stable par ultraproduit. Dans l'autre, on fait un ultraproduit sur toutes les parties finies de T en choisissant pour chaque partie un modèle de la partie finie qui ne soit pas un modèle de T tout entier (cf. Cori-Lascar tome 2, exo 13 du chap. 8).

Exercice 2. Théories axiomatisables.
Parmi les classes de structures suivantes, déterminer celles dont la théorie est finiment axiomatisable, axiomatisable (mais pas finiment), ou non axiomatisable :

(i) ensembles non dénombrables

(ii) corps de caractéristique non nulle

(iii) corps de caractéristique nulle

(iv) anneaux infinis

(v) groupes d'exposant fini (dans $\mathcal{L}_{gp} = \{e, \circ, (\cdot)^{-1}\}$)

(vi) groupes abéliens sans torsion

(vii) groupes abéliens divisibles

(viii) groupes abéliens finis

(ix) groupes d'exposant n (pour n fixé)

(x) ordres discrets

Solution de l'exercice 2.
On utilisera sans les mentionner explicitement les résultats de l'exercice 1) (questions 1 et 3).

(i) Ce n'est pas axiomatisable si on se donne le langage usuel (uniquement le symbole d'égalité) à cause du théorème de Löwenheim-Skolem qui nous fournit des modèles dénombrables. Une solution serait d'ajouter $\aleph_1$ symboles de constantes de de considérer la théorie qui dit que tous ces symboles sont distincts. La théorie est alors axiomatisable, mais pas finiment puisque les parties finies de l'axiomatisation sont réalisées par des ensembles finis.

(ii) Ce n'est pas axiomatisable car un ultraproduit de coprs de caractéristique non nulle peut avoir caractéristique nulle (prendre un ultraproduit de $\mathbb{F}_p$ sur un ultrafiltre non principal sur l'ensemble des nombres premiers).

(iii) C'est axiomatisable en prenant les axiomes des corps et les énoncés $\varphi_p : \underbrace{1 + ... + 1}_{p \text{ fois}} \neq 0$.

Ce n'est pas finiment axiomatisable car si on prend un nombre fini de φ_p et les axiomes de corps, si q est premier suffisament grand alors $\mathbb{F}_q$ est un modèle de cet ensemble fini d'axiomes.

(iv) Ce n'est pas axiomatisable, toujours en considérant l'ultraproduit des $\mathbb{F}_p$ vus cette fois-ci comme groupes additifs.

(v) C'est axiomatisable en ajoutant aux axiomes des groupes abéliens des axiomes φ_n pour $n \in \mathbb{N}$ donnés par $\varphi_n : \forall g, g \neq e \to g^n \neq e$. Ce n'est pas finiment axiomatisable car si on prend un nombre fini de $\varphi_,$ et les axiomes de groupes abéliens, $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ en est un modèle pour m assez grand.

(vi) C'est axiomatisable en ajoutant aux axiomes des groupes abéliens les axiomes φ_n : $\forall g \exists h, h^n = g$. Ce n'est pas finiment axiomatisable (considérer $\mathbb{Z}[1/m!]$ pour m assez grand).

(vii) Non axiomatisable : l'ultraproduit des $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est infini.

(viii) Finiment axiomatisable par $\forall g g^n = e$.

(ix) Finiment axiomatisable (cf TD précédents).

Exercice 3. Modèles non-standards.

Si $\mathfrak{M}$ est une $\mathcal{L}$-structure, on note $\mathrm{Th}(\mathfrak{M}) = \{\varphi \ \mathcal{L}\text{-énoncé} \mid \mathfrak{M} \models \varphi\}$ la *théorie de* $\mathfrak{M}$.

1. Soit $\mathfrak{R} = (\mathbb{R}, +, -, \cdot, <, 0, 1)$ le corps des réels (dans le langage des corps ordonnés $\mathcal{L}_{c.ord} = \{+, -, \cdot, <, 0, 1\}$).
   (a) Montrer qu'il existe un modèle $\mathfrak{R}' \models \mathrm{Th}(\mathfrak{R})$ et un élément α dans la structure $\mathfrak{R}'$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $\mathfrak{R}' \models \alpha > \mathbf{n}$, où $\mathbf{n}$ désigne le terme $\underbrace{1 + \ldots + 1}_{n \text{ fois}}$.
   (b) En déduire que la classe des corps ordonnés *archimédiens* (pour tout $x, y > 0$ il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $nx > y$) n'est pas axiomatisable dans $\mathcal{L}_{c.ord}$.
2. Soit $\mathfrak{Z} = (\mathbb{Z}, +, -, \cdot, 0, 1)$ l'anneau des entiers. Montrer qu'il existe un modèle $\mathfrak{Z}^* \models \mathrm{Th}(\mathfrak{Z})$ contenant un élément α qui est divisible par une infinité d'éléments distincts.
3. On considère la structure $\mathcal{Z} = (\mathbb{Z}, <)$, dans le langage des ordres stricts. Montrer qu'il existe un modèle $\mathcal{Z}' = (\mathbb{Z}', <) \models \mathrm{Th}(\mathcal{Z})$ tel que $(\mathbb{Q}, <)$ se plonge dans $\mathcal{Z}'$.

Solution de l'exercice 3.

1. (a) — **Méthode 1 :** ultraproduit. Considérons un ultrafiltre ω non principal sur $\mathbb{N}$ et l'ultrapuissance $\mathfrak{R}^\omega$. D'après le théorème de Łoś, elle satisfait la même théorie que $\mathfrak{R}$. De plus, la classe d'équivalence de la suite $(n)_{n \in \mathbb{N}}$ est plus grande que tout entier m (représenté par la suite constante $(m)_{n \in \mathbb{N}}$) car l'ensemble des $n \in \mathbb{N}$ tels que $n > m$ est cofini, donc appartient à ω, ce qui permet de conclure par le théorème de Łoś.
   — **Méthode 2 :** compacité (c'est la méthode la plus flexible, il est important de bien la comprendre). On ajoute un symbole de constante c à notre langage. On ajoute les axiomes $\varphi_n : c > \mathbf{n}$. La nouvelle théorie est finiment satisfaisable (par $\mathfrak{R}$!) car il suffit d'interpréter c comme un élément de $\mathfrak{R}$ suffisament grand. Elle est consistante par compacité, et si $\mathfrak{R}'$ en est un modèle, alors le réduit de $\mathfrak{R}'$ à notre langage de départ est comme voulu, puisque l'interprétation α de c est comme voulue (en effet $\mathfrak{R}' \models \varphi_n$).

(b) si elle était axiomatisable, $\mathfrak{R}'$ serait archimédien, ce qui est manifestement faux.

2. — **Méthode 1 :** ultraproduit. Cette fois-ci, il faut considérer la suite $(n!)_{n\in\mathbb{N}}$ dans l'ultrapuissance de $\mathfrak{Z}$.
   — **Méthode 2 :** compacité. On ajoute un symbole de constante c à notre langage. On ajoute les axiomes $\varphi_n : \exists x, c = \underbrace{x + \cdots + x}_{n \text{ fois}}$. La nouvelle théorie est finiment satisfaisable (par $\mathfrak{Z}\,!$) car il suffit d'interpréter c comme $m!$ pour m suffisament grand. Elle est consistante par compacité, et si $\mathfrak{Z}'$ en est un modèle, alors le réduit de $\mathfrak{Z}'$ à notre langage de départ est comme voulu.

3. On va le faire par compacité : on ajoute des constances $(c_q)_{q\in\mathbb{Q}}$ et pour $q < q' \in \mathbb{Q}$ l'axiome $c_q < c_{q'}$ (c'est le **diagramme** de $(\mathbb{Q}, <)$). Remarquons que si $\mathfrak{Z}'$ est un modèle de la nouvelle théorie, par construction l'application $q \mapsto c_q^{\mathfrak{Z}'}$ est un plongement. Or la nouvelle théorie est clairement finiment satisfaisable, donc satisfaisable par compacité.

Exercice 4. Graphes non-orientés.

Rappelons qu'un *graphe* est une structure $\Gamma = (G; R^\Gamma)$, avec $\emptyset \neq G$ l'ensemble des *sommets* et $R^\Gamma \subseteq G^2$ l'ensemble des *arêtes*. Nous considérons des graphes *non-orientés*, c.-à-d. nous supposons que R^Γ est symétrique et irréflexive.

Un uplet $(g_0, \ldots, g_n)$ est un *chemin* dans Γ si $(g_i, g_{i+1}) \in R^\Gamma$ pour $i = 0, \ldots, n-1$. L'entier n est appelé la *longueur* du chemin. On dit qu'une partie $H \subseteq G$ est *connexe* si pour tout $h, h' \in H$ il existe un chemin $(h_0, \ldots, h_n)$ tel que $h_i \in H$ pour tout i et $h_0 = h$, $h_n = h'$. Une partie $C \subseteq G$ est une *composante connexe* de Γ si C est une partie connexe maximale de G. On voit que G est réunion disjointe de ses composantes connexes. On dit que Γ est connexe si G l'est.

Nous considérons les graphes comme structures dans $\mathcal{L} = \{R\}$, avec R un symbole de relation binaire.

1. Donner une formule $\psi_n(x, y)$ telle que pour tout graphe Γ et tout $g, h \in G$ on ait $\Gamma \models \psi_n[g, h]$ si et seulement s'il existe, dans Γ, un chemin de longueur n entre g et h.
2. Montrer qu'il existe une $\mathcal{L}$-formule $\phi_n(x_1, \ldots, x_n)$ telle que pour tout graphe Γ et tout uplet $\overline{g} \in G^n$ on ait $\Gamma \models \phi_n[\overline{g}]$ si et seulement si $(g_1, \ldots, g_n)$ énumère une composante connexe de Γ de cardinal n.
3. Montrer que si Γ et Δ sont deux graphes avec $\mathrm{Th}(\Gamma) = \mathrm{Th}(\Delta)$ et si Γ contient au moins (respectivement, au plus) k composantes connexes de cardinal n, où k et n sont des entiers fixés, alors Δ contient au moins (respectivement, au plus) k composantes connexes de cardinal n.
4. Donner un exemple de graphe Γ dont toute composante connexe est finie et tel qu'il existe un graphe Δ ayant une composante connexe infinie avec $\mathrm{Th}(\Gamma) = \mathrm{Th}(\Delta)$.
5. Soit $\Gamma_\mathbb{Z} = (\mathbb{Z}; R^\mathbb{Z})$, où $R^\mathbb{Z} = \{(i, i+1) \mid i \in \mathbb{Z}\} \cup \{(i+1, i) \mid i \in \mathbb{Z}\}$, et soit Γ' un graphe avec $\mathrm{Th}(\Gamma_\mathbb{Z}) = \mathrm{Th}(\Gamma')$ tel que $\Gamma' \not\cong \Gamma_\mathbb{Z}$. Montrer que Γ' n'est pas connexe.
6. En déduire que ni la connexité ni la non-connexité ne sont des propriétés axiomatisables pour les graphes.
7. Montrer que $\mathrm{Th}(\Gamma_\mathbb{Z})$ n'est pas finiment axiomatisable.

Solution de l'exercice 4.

1. Clair d'après la définition.
2. Il faut dire qu'il y a un chemin entre x_1 et chacun des x_i puis dire qu'aucun autre x n'est relié à x_1

3. Conséquence pas difficile de la question précédente.
4. Il suffit de prendre un graphe avec des graphes complets finis de plus en plus grands. Alors la théorie de ce graphe est cohérente avec le fait d'avoir une infinité de constantes toutes reliées entre elles.
5. On raisonne par contradiction : si Γ' est connexe il est isomorphe à $\mathbb{Z}$. Pour cela, il suffit d'utiliser le fait que tout sommet a exactement deux voisins et qu'il n'y a pas de cycles pour construire un plongement de $\mathbb{Z}$ dans Γ' qui sera surjectif car Γ' est connexe.
6. On peut trouver un Γ' de cardinal strictement plus grand que le cardinal de $\mathbb{Z}$ mais non isomorphe d'après Lowenheim-Skolem ascendant. Il est alors non-connexe mais a la même théorie que $\mathbb{Z}$ qui est connexe. Donc ni la connexité ni la non-connexité ne sont axiomatisables.
7. Il faut d'abord comprendre que la théorie de $\Gamma_{\mathbb{Z}}$ est donnée par le fait que tout sommet soit de degré 2 et il n'y a pas de cycle. Pour voir ça, notons T la théorie qui dit que tout sommet soit de degré 2 et il n'y a pas de cycle, et montrons qu'elle est complète, elle sera alors égale à $\mathrm{Th}(\Gamma_{\mathbb{Z}})$. La preuve de la question 5 nous montre qu'en fait tout modèle de T est une réunion disjointe de copies de $\Gamma_{\mathbb{Z}}$. En particulier si κ est un cardinal non dénombrable, on voit que T est κ-catégorique. Ainsi T est complète. Maintenant le fait de ne pas avoir de cycle est donné par un ensemble infini d'axiomes φ_n qui interdisent les n-cycles, et si on en prend un sous-ensemble fini on prend une boucle suffisament grande qui satisfait cet ensemble fini d'axiomes mais ne satisfait pas la théorie de $\mathbb{Z}$.

Exercice 5. Espaces vectoriels.

Soit K un corps. On considère le langage $\mathcal{L} = \{0, +, -\} \cup \{\lambda_r \mid r \in K\}$, où 0 est un symbole de constante, + un symbole de fonction binaire et où $-$ ainsi que les λ_r sont des symboles de fonction unaires.

Un K-espace vectoriel est naturellement une $\mathcal{L}$-structure (+ est interprété comme l'addition, 0 comme le vecteur 0, la fonction - par le passage au vecteur opposé, et λ_r comme la mutiplication scalaire avec r).

1. Montrer que l'on peut axiomatiser la classe des K-espaces vectoriels infinis dans $\mathcal{L}$. Soit T_K la théorie ainsi obtenue.
2. Soit $\mathfrak{V} \models T_K$. Décrire les sous-structures de $\mathfrak{V}$.
3. Montrer que pour tout $\mathfrak{V} \models T_K$ il existe $\mathfrak{V}^* \equiv \mathfrak{V}$ tel que $\mathfrak{V}^*$ soit de dimension infinie.
4. Montrer que si K est fini, alors T_K est *totalement catégorique*, c'est-à-dire κ-catégorique pour tout cardinal infini κ.

   Plus généralement, pour K quelconque, montrer que T_K est κ-catégorique pour tout κ infini avec $\kappa > \mathrm{card}(K)$.
5. En déduire que T_K est une théorie complète.

Solution de l'exercice 5.

1. Immédiat, on rappelle que pour dire que la structure est infinie il faut dire pour tout n qu'elle est de cardinal $\geqslant n$ ($\exists x_1 \ldots \exists x_n \bigwedge_{i \neq j} x_i \neq x_j$).
2. Les sous-structures sont les sous-espaces vectoriels.
3. On rappelle que le cardinal de $\mathcal{V}$ égal à $|\mathcal{B}|\,|K|$ dès lors qu'il est infini. Donc le théorème de Lowenheim-Skolem pour un cardinal suffisament grand nous fournit $\mathfrak{V}^*$ extension élémentaire de $\mathfrak{V}$ de dimension infinie.
4. Si K est fini, et $\mathfrak{V}_1$ et $\mathfrak{V}_2$ sont de même cardinalité et infinis, alors leur cardinalité est égale au cardinal de leur base et ils sont donc isomorphes. Le même argument marche pour κ infini strictement plus grand que $|K|$.

5. Il suffit de montrer que tous les modèles de T_K ont la même théorie. Soit $\mathfrak{V}_1$ et $\mathfrak{V}_2$ deux modèles, par LS on trouve $\mathfrak{V}'_1$ et $\mathfrak{V}'_2$ de même cardinalité $> |K|$ et de mêmes théories que $\mathfrak{V}_1$ (resp. $\mathfrak{V}_2$). Or d'après la question précédente $\mathfrak{V}'_1$ et $\mathfrak{V}'_2$ sont isomorphes, en particulier ils ont la même théorie donc $\mathfrak{V}_1$ et $\mathfrak{V}_2$ ont la même théorie.