TD 7 - Va-et-vient, catégoricité

Exercice 1. (Ordres denses avec un prédicat)
On considère le langage $\mathcal{L} = \{<, P\}$ où $<$ est un symbole de relation binaire et où P est un symbole de relation unaire. Soit T_0 la théorie qui exprime que $<$ est une relation d'ordre total dense sans extrémités.

1. Soit $T_1 \supseteq T_0$ une théorie qui, en plus des propriétés données par T_0, exprime que l'interprétation de P et le complémentaire de cette interprétation sont des sous-ensembles non-vides, convexes sans plus grand ni plus petit élément, et que tout élément de l'interprétation de P est plus petit (pour l'ordre qui interprète $<$) que tout élément de son complémentaire.
   (a) Montrer que T_1 est une théorie du premier ordre qui est $\aleph_0$-catégorique.
   [Indication : On pourra montrer que deux modèles de T_1 se correspondent par va-et-vient.]
   (b) En déduire que T_1 est complète.
   (c) Donner un modèle dénombrable ainsi qu'un modèle non dénombrable de T_1.
   (d) Soit κ un cardinal infini non dénombrable. Montrer que T_1 n'est pas κ-catégorique.
2. Soit $T_2 \supseteq T_0$ une théorie qui, en plus des propriétés données par T_0, exprime que l'interprétation de P et le complémentaire de cette interprétation sont des sous-ensembles denses dans l'ensemble de base du modèle (pour l'ordre $<$).
   (a) Montrer que T_2 est une théorie du premier ordre qui est $\aleph_0$-catégorique et complète.
   (b) Donner deux modèles de T_2 de cardinal $2^{\aleph_0}$ et non-isomorphes.
   (c) Montrer que T_2 n'est κ-catégorique pour aucun cardinal infini non dénombrable κ.

Exercice 2.
On considère le langage $\mathcal{L} = \{E\}$ où E est un symbole de relation binaire. Soit T la théorie des -structures dans lesquelles E définit une relation d'équivalence ayant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exactement une classe d'équivalence de cardinal n.

1. Axiomatiser T au premier ordre.
2. Déterminer les modèles dénombrables de T à isomorphisme près.
3. Montrer que deux modèles de T ayant un nombre infini de classes d'équivalence infinies se correspondent par va-et-vient.
4. Montrer que T est complète.

Exercice 3.
Le langage $\mathcal{L} = \{s\}$ comprend un symbole de fonction unaire s. Soit T l'ensemble des énoncés suivant :

A_1 $\forall x \forall y (sx = sy \Rightarrow x = y)$;
A_2 $\forall x \exists y \; x = sy$;
A_{3n} pour chaque entier $n > 0$ l'axiome $\forall x \neg (s^n x = x)$;

1. Montrer que tout modèle de T est infini. Donner un modèle de T dénombrable et un modèle non dénombrable. La théorie T est-elle $\aleph_0$-catégorique ?

2. Soit $\mathcal{M} = (\mathcal{M}, f^{\mathcal{M}})$ un modèle de T (Par commodité on notera s à la place de $s^{\mathcal{M}}$). Pour chaque $a \in M$ soit $O(a) = \{s^n(a)\ ;\ n \in \mathbb{Z}\}$ et $O^+(a) = \{s^n(a)\ ;\ n \in \mathbb{N}\}$ Montrer que pour tout $a \in M$, $(O(a), s)$ (resp. $(O^+(a), s)$) est une -structure isomorphe à $(\mathbb{Z}, x \mapsto x+1)$ (resp. à $(\mathbb{N}, x \mapsto x+1)$. Montrer que le domaine d'une sous-sructure de $\mathcal{M}$ finiment engendrée est une union finie disjointe d'ensembles de la forme $O^+(a)$ où $a \in M$.
3. Soient $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux modèles **non dénombrables** de T. Montrer qu'ils sont en va-et-vient. La condition "non dénombrables" est elle nécessaire ?
4. En déduire que T est complète.
5. Montrer que T est κ-catégorique pour tout cardinal κ non dénombrable.