
DM 3 – à rendre le 4 décembre

Le soin accordé à la rédaction sera pris en compte dans l'évaluation de la copie.

Exercice 1. 2-Sat est dans P

On considère le problème 2-SAT suivant :

- **Donnée** : Une formule propositionnelle φ sous forme normale conjonctive avec au plus deux littéraux par clause.
- **Question** : φ est-elle satisfaisable ?

On veut montrer que 2-SAT est dans P. Pour cela on va utiliser un problème auxiliaire sur les graphes orientés qui reviendra à la fin du cours. On rappelle qu'un graphe orienté est un couple (V, E) où $E \subseteq V \times V$. On considère le problème GAP (graph accessibility problem) :

- **Donnée** : Un graphe orienté $G = (V, E)$ (sous forme de sa matrice d'adjacence) et deux sommets $x, y \in V$.
- **Question** : Existe-t-il un chemin entre x et y , c'est-à-dire une suite v_1, \dots, v_n avec $v_1 = x$, $v_n = y$ et pour tout $i = 1, \dots, n-1$, $(v_i, v_{i+1}) \in E$?

1. Montrer que GAP est dans P. On pourra s'inspirer de l'algorithme vu en TD pour montrer qu'un graphe non-orienté est connexe.

2. On considère le problème auxiliaire EX2-SAT suivant :

- **Donnée** : Une formule propositionnelle φ sous forme normale conjonctive avec *exactement* deux littéraux par clause.
- **Question** : φ est-elle satisfaisable ?

Montrer que 2-SAT se réduit polynomialement à EX2-SAT.

3. On va expliciter le lien entre EX2-SAT et GAP.

(a) Soit φ une instance de EX2-SAT, et soit $(C_i)_{i \in I}$ une énumération de ses clauses. Posons $C_i = x_i \vee y_i$ où x_i et y_i sont des littéraux. Soit un graphe G_φ dont l'ensemble des sommets est l'ensemble des littéraux de φ , et où pour chaque clause $C_i = x_i \vee y_i$ où x_i et y_i sont des littéraux on met une arête entre $\neg x_i$ et y_i et une arête entre $\neg y_i$ et x_i (NB : si x_i est de la forme $\neg x$, on considère que $\neg x_i = x$). On dit que G_φ est le **graphe d'implication** de φ . Pourquoi l'appeler ainsi ?

(b) Montrer que si φ est satisfaisable, alors pour toute variable propositionnelle x , il ne peut y avoir à la fois un chemin et x à $\neg x$ et de $\neg x$ à x .

(c) (facultatif) On va montrer la réciproque : si pour toute variable propositionnelle x , il ne peut y avoir à la fois un chemin et x à $\neg x$ et de $\neg x$ à x alors φ est satisfaisable. On suppose donc que pour toute variable propositionnelle x , il ne peut y avoir à la fois un chemin et x à $\neg x$ et de $\neg x$ à x

i) On introduit un pré-ordre \prec sur le graphe d'implication G_φ donné par : pour tous littéraux x et y , $x \prec y$ ssi il existe un chemin de x à y . On pose également $x \sim y$ ssi $(x \prec y \text{ et } y \prec x)$ ou $x = y$. Ainsi l'hypothèse s'écrit : pour tout littéral x , on a $x \not\prec \neg x$. Montrer que \sim est une relation d'équivalence et que \prec passe au quotient en une relation d'ordre stricte $<$ sur X/\sim .

ii) Montrer que si δ est une d.v.v. qui satisfait φ , alors elle doit assigner les mêmes valeurs aux éléments \sim -équivalents.

iii) Si K est une classe d'équivalence de \sim , montrer que l'ensemble $\neg K$ formé de toutes les négations des éléments de K est une classe d'équivalence de \sim , et que $K \neq \neg K$.

- iv) Montrer que l'application $K \mapsto \neg K$ renverse l'ordre $<$. Enfin, montrer que
- v) On construit alors une d.v.v. ainsi : on prend une \sim -classe K maximale pour l'ordre strict $<$, on affecte Vrai à ses éléments et on affecte Faux aux éléments de $\neg K$. Puis on enlève K , \bar{K} et toutes les arêtes qui leur étaient reliées et on recommence. Montrer que l'algorithme nous fournit bien une d.v.v. satisfaisant φ .

(d) En déduire que EX2-SAT est dans P.

4. Conclure que 2-SAT est dans P.

Exercice 2. CNF-Sat est NP-complet

On considère le problème CNF-SAT suivant :

- **Donnée** : Une formule propositionnelle φ sous forme normale conjonctive.
- **Question** : φ est-elle satisfaisable ?

1. Montrer que CNF-SAT est NP-complet. On pourra utiliser la preuve de la NP-complétude de SAT.
2. En déduire que le problème DNF-TAUT suivant est coNP-complet :
 - **Donnée** : Une formule propositionnelle φ sous forme normale disjonctive.
 - **Question** : φ est-elle une tautologie, c'est-à-dire est-elle satisfaite par toute d.v.v. ?

Exercice 3. Mon-Sat est NP-complet

On considère le problème MON-SAT suivant :

- **Donnée** : Une formule propositionnelle φ en CNF dont chaque clause ne contient que des littéraux positifs ou que des littéraux négatifs.
- **Question** : φ est-elle satisfaisable ?

En partant de CNF-SAT puis en ajoutant pour chaque clause C une variable x_C et remplaçant C par deux clauses C^+ et C^- , montrer que MON-SAT est NP-complet.