
TD 1 – Axiomes de ZF, ordinaux

1. Des collections suivantes lesquelles sont des ensembles :
 - (a) $\{R : R \text{ est une relation d'équivalence}\}$;
 - (b) les ordinaux limites ;
 - (c) $\{x : a \in x\}$ pour un ensemble a fixé ;
 - (d) $\{x : x \text{ est dénombrable}\}$?
2. Un *plongement* d'un ensemble ordonné $(X, <)$ dans un autre $(Y, <)$ est une application (injective) $f : X \rightarrow Y$ telle que $f(x) < f(x')$ ssi $x < x'$ pour tout $x, x' \in X$.
 - (a) Montrer que tout bon ordre dénombrable se plonge dans $(\mathbb{Q}, <)$.
 - (b) Quels sont les bons ordres qui admettent un plongement dans $(\mathbb{R}, <)$?
 - (c) On suppose que $(X, <)$ est un bon ordre et que $(X, >)$ est également un bon ordre. Montrer que X est fini.
3. Pour $n \in \omega$, on note V_n l'ensemble $\underbrace{\mathcal{P}(\mathcal{P}(\dots\mathcal{P}(\emptyset)\dots))}_n$.
 - (a) Montrer que pour tout $n \in \omega$, $V_n \subseteq V_{n+1}$;
 - (b) Justifier l'existence de $V_\omega = \bigcup_{n \in \omega} V_n$. Les ensembles dans V_ω s'appellent *héréditairement finis*.
 - (c) Montrer que V_ω est un ensemble transitif ;
 - (d) Montrer que (V_ω, \in) est un modèle de ZF – Inf ;
 - (e) Pour chaque entier n , montrer que $n \in V_\omega$. Quel est le plus petit $m \in \omega$ tel que $n \in V_m$?
 - (f) Montrer que (V_ω, \in) ne satisfait pas l'axiome de l'infini.
4. Soit $\theta : \mathcal{O}_n \rightarrow \mathcal{O}_n$ une relation fonctionnelle strictement croissante et continue (si λ est un ordinal limite, on dit que θ est *continue* en λ si elle vérifie $\theta(\lambda) = \sup\{\theta(\gamma) : \gamma < \lambda\}$).
 - (a) Soit α un ordinal. Expliquez pourquoi $\{\theta^n(\alpha) : n \in \omega\}$ est bien un ensemble.
 - (b) Soit $\beta = \sup\{\theta^n(\alpha) : n \in \omega\}$. Montrer que pour tout ordinal $\gamma < \beta$ on a $\theta(\gamma) < \beta$.
 - (c) Vérifier que si $\theta(\alpha) \neq \alpha$ alors la suite $(\theta^n(\alpha))_{n \in \omega}$ est strictement croissante et β est un ordinal limite.
 - (d) Montrer que θ a un point fixe : il existe un ordinal γ tel que $\theta(\gamma) = \gamma$. Montrer que la collection des points fixes de θ n'est pas un ensemble.
 - (e) Montrer que l'on peut définir une fonction de \mathcal{O}_n dans \mathcal{O}_n qui à tout ordinal α associe le α -ième ordinal limite. Quel est le premier point fixe de cette fonction ?
5. On rappelle qu'un ensemble t est *transitif* s'il vérifie $\forall x(x \in t \rightarrow x \subseteq t)$.
 - (a) Soit t un ensemble transitif. Montrer qu'il vérifie $\forall x(x \subseteq t \rightarrow \cup x \subseteq t)$.
 - (b) Soit a un ensemble fixé. On définit par récurrence $\pi^n(a)$ pour $n \in \omega$ par :
 - $\pi^0(a) = a$;
 - pour $n \in \omega$, $\pi^{n+1}(a) = \bigcup \pi^n(a) = \pi(\pi^n(a))$.
 Justifier qu'il existe un ensemble b dont les éléments sont les $\pi^n(a)$ pour $n \in \omega$ (a fixé). Montrer que la *clôture transitive* de a , $\text{ct}(a) = \bigcup b$ est un ensemble transitif et que c'est le plus petit ensemble transitif contenant a .