TD 3 – Cardinaux

Exercice 1. Une autre version de l'axiome du choix.
On travaille dans ZF. Soit x un ensemble. On rappelle que $h(x)$ est le plus petit ordinal qui ne s'injecte pas dans x.

1) Montrer que $h(x)$ est subpotent à $\mathcal{P}(\mathcal{P}(x \times x))$.
2) Montrer que l'énoncé suivant est équivalent à l'axiome du choix :

Si a et b sont deux ensembles alors ou bien a est subpotent à b ou bien b est subpotent à a.

Exercice 2. Et une autre !
Le but de cet exercice est de montrer (dans ZF) que l'énoncé

$(*)$ *Tout ensemble infini X est équipotent à son carré cartésien $X \times X$.*

implique l'axiome du choix. Si A est un ensemble, on note $h(A)$ le plus petit ordinal qui ne s'injecte pas dans A. Soit A un ensemble tel que $(A \cup h(A)) \times (A \cup h(A))$ est équipotent à $A \cup h(A)$. En travaillant dans ZF :

1) Montrer qu'il existe une injection $\pi \colon A \times h(A) \to A \cup h(A)$.
2) Montrer que pour tout $a \in A$ il existe $\xi \in h(A)$ tel que $\pi(a, \xi) \in h(A) \setminus A$.
3) En déduire l'existence d'une injection de A dans $h(A)$.
4) En conclure que $(*)$ implique l'axiome du choix.

Exercice 3. Ensembles de petites parties.
Si κ est un cardinal et A est un ensemble on note $\mathcal{P}_\kappa(A)$ l'ensemble des parties de A ayant κ éléments et $\mathcal{P}_{<\kappa}(A)$ l'ensemble des parties de A ayant strictement moins de κ élémenents.

1) Montrer que pour tout cardinal infini κ, $|\mathcal{P}_{<\aleph_0}(\kappa)| = \kappa$.
2) Montrer que pour tout cardinal infini κ, $|\mathcal{P}_\kappa(\kappa)| = 2^\kappa$.
3) Montrer que $\lambda \leqslant \kappa$ sont deux cardinaux, avec κ infini, alors $|\mathcal{P}_\lambda(\kappa)| = \kappa^\lambda$.

Exercice 4. Après aleph, beth.
On définit la suite de cardinaux $\beth_\alpha$ par induction :

$$\begin{aligned} \beth_0 &= \aleph_0 \\ \beth_{\alpha+1} &= 2^{\beth_\alpha} \\ \beth_\alpha &= \sup_{\beta<\alpha} \beth_\beta \quad \text{pour } \alpha \text{ limite.} \end{aligned}$$

On rappelle qu'un cardinal κ est dit *fortement limite* si $2^\lambda < \kappa$ pour tout $\lambda < \kappa$.

1) Montrer qu'un cardinal non dénombrable κ est fortement limite si et seulement s'il existe un ordinal limite α tel que $\kappa = \beth_\alpha$.
2) Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\aleph_\alpha = \beth_\alpha$.

Exercice 5. Formule de Hausdorff.

1) Montrer que si μ est régulier alors pour tout cardinal $\kappa < \mu$ l'ensemble des applications de κ dans μ est égal à l'union $\bigcup_{\gamma<\mu} \gamma^\kappa$ des ensembles d'applications de κ dans γ avec $\gamma < \mu$.
2) Montrer la formule de Hausdorff : $\aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\beta} = \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \cdot \aleph_{\alpha+1}$. En déduire que pour tout entier n, $\aleph_n^{\aleph_\beta} = 2^{\aleph_\beta} \cdot \aleph_n$.

Exercice 6. Une conséquence de l'hypothèse généralisée du continu.
On suppose *l'hypothèse généralisée du continu*, i.e., $2^\kappa = \kappa^+$ pour tout cardinal infini κ. Soit λ un cardinal infini et μ un cardinal non nul. Montrer que

$$\lambda^\mu = \begin{cases} \lambda & \text{si} \quad \mu < \operatorname{cof}(\lambda) \\ 2^\lambda & \text{si} \quad \operatorname{cof}(\lambda) \leqslant \mu \leqslant \lambda \\ 2^\mu & \text{si} \quad \lambda < \mu. \end{cases}$$

Exercice 7. Un peu de cofinalité
Montrer que si κ est un cardinal infini, alors $\mathrm{cof}(2^\kappa) > \kappa$.

Exercice 8. Deux ensembles stationnaires disjoints

(1) Montrer que l'ensemble $C_{lim} = \{\alpha \in \omega_1 : \alpha \text{ limite}\}$ est un club.

(2) On fixe pour chaque $\alpha \in \omega_1$ limite une suite strictement croissante $(\gamma_{n,\alpha})$ telle que $\alpha = \sup\limits_{n\in\omega} \gamma_{n,\alpha}$.

   (a) Montrer qu'il existe pour chaque n un ordinal γ_n et un ensemble stationnaire S_n tel que pour tout $\alpha \in S_n$ limite, on ait $\gamma_{n,\alpha} = \gamma_n$. On fixe désormais de tels S_n et γ_n.

   (b) Montrer que l'intersection $\bigcap_{n\in\omega} S_n$ contient au plus un ordinal limite.

   (c) En déduire l'existence d'un $n \in \omega$ tel que $\omega_1 \setminus S_n$ soit stationnaire.