TD 4 – Autour des relations bien fondées

Exercice 1. Relations bien fondées.
Soit $\prec$ une relation sur un ensemble X, on dit qu'un sous-ensemble Y de X est **inductif** si pour tout $x \in X$, si l'ensemble $\{y \in X : y \prec x\}$ est inclus dans Y, alors $x \in Y$.

(1) Montrer qu'une relation $\prec$ sur un ensemble X est bien fondée ssi le seul sous-ensemble inductif non vide de X est X. C'est ce qui permet de faire des *preuves par induction bien fondée.*

(2) Montrer que la cloture transitive [1] de toute relation bien fondée est une relation d'ordre stricte bien fondée. Si $\prec$ est une relation bien fondée, on note $<$ sa cloture transitive.

Si $x \in X$ on note $\prec_x := \{y \in X : y \prec x\}$ et $<_x := \{y \in X : y < x\}$. Soit H une relation fonctionnelle d'image la collection $\mathcal{C}$ et telle que pour tout $x \in X$, toute fonction de domaine $\prec_x$ à valeur dans $\mathcal{C}$ soit dans le domaine de H. Une fonction f de domaine X est H-inductive si pour tout $x \in X$,

$$f(x) = H(f_{\restriction \prec_x}).$$

(3) Montrer que si H est comme ci-dessus et $(X, \prec)$ est bien fondé alors il existe une et une seule fonction H-inductive de domaine X. [2] On dit qu'une telle fonction est *construite par induction bien fondée.*

Soit $\mathcal{C}$ une collection. Une relation $\prec$ sur $\mathcal{C}$ est dite **bien fondée** si pour tout $x \in X$, la collection $\prec_x$ est un ensemble et si toute sous-collection de $\mathcal{S}$ non vide admet un élément $\prec$-minimal.

(4) Montrer que l'univers $\mathcal{U}$ est bien fondé pour $\in$ ssi AF est vérifié.

(5) Montrer que l'on peut faire des constructions de relations fonctionnelles par induction bien fondée.

(6) Soit $(\mathcal{C}, \prec)$ une classe bien fondée. On construit par induction bien fondée la relation fonctionnelle $\mathrm{rg}_\prec : \mathcal{C} \to \mathcal{O}n$ en posant

$$\mathrm{rg}_\prec(x) = \sup\{\mathrm{rg}(y) : y \prec x\} + 1.$$

Expliquer pourquoi une telle construction est bien définie.

(7) On suppose que $\mathcal{U}$ satisfait AF. Montrer que $\mathrm{rg}_\in = \mathrm{rg}$.

Exercice 2. Arbres bien fondés.
Soit A un ensemble. On note $A^{<\omega} = \bigcup_{n\in\omega} A^n$ l'ensemble des mots finis sur A, on note $\emptyset$ le mot vide et on note $\subseteq$ la relation de préfixe entre mots de A. Un *arbre* sur A est une partie T de $A^{<\omega}$ qui est close par préfixe : si $x \in T$ et $y \subseteq x$ alors $y \in T$.
Un arbre T s'appelle *bien fondé* si la relation $(T, \supset)$ est bien fondée. Remarquons que le mot vide $\emptyset$ appartient à tout arbre non-vide ; $\emptyset$ s'appelle *la racine* de l'arbre. Enfin, un arbre est *équeuté* si pour tout $x \in T$ il existe $a \in A$ telle que $xa \in T$.

(1) Montrer que l'axiome du choix dépendant est équivalent à l'énoncé suivant : pour tout ensemble A et tout arbre T non vide équeuté sur A , il existe une suite $(a_n) \in A^\omega$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_0 \cdots a_n \in T$ (on dit que (a_n) est une *branche infinie* de T).

(2) (Lemme de König) Montrer que si A est fini, alors T est bien fondé ssi il est fini.

(3) Donner des exemples d'arbres dont la racine est de rang $1, 5, \omega + 1, \omega^2 + 1, \omega^\omega + 1$. Montrer que pour tout ordinal dénombrable α, il existe un arbre sur ω dont la racine a rang $\alpha + 1$. Inversement, montrer que le rang de tout élément d'un arbre sur A est toujours plus petit que $|A|^+$.

1. La cloture transitive d'une relation est par définition la plus petite relation transitive contenant la relation en question. On voit facilement que si R est une relation, sa cloture transitive est l'ensemble des couples (x, y) tels qu'il existe $n \in \omega$ et $x_0, ..., x_n$ avec $x_0 = x$, $x_n = y$ et pour tout $i \in n$, $(x_i, x_{i+1}) \in R$.

2. On pourra montrer par induction sur $x \in X$ que pour tout $x \in X$ il existe une unique fonction H-inductive de domaine $<_x$.

(4) Dans cette partie on suppose que $A = \alpha$ est un ordinal. L'*ordre de Kleene–Brouwer* sur $A^{<\omega}$ est défini par

$$s <_{KB} t \iff (s \supset t) \vee \exists i < \min(m,n)\ \forall j < i\ s_j = t_j \wedge s_i < t_i,$$

où $s = (s_0, \ldots, s_{m-1})$, $t = (t_0, \ldots, t_{n-1})$ sont des éléments de $A^{<\omega}$.

(a) Montrer que $<_{KB}$ est un ordre total sur $A^{<\omega}$;

(b) Montrer que si $T \subseteq A^{<\omega}$ est un arbre, alors T est bien fondé ssi $<_{KB}|_T$ est un bon ordre.

Exercice 3. Appartenance tordue.

(1) En utilisant les notions de formules bornées vues en cours, donner une preuve complète du fait que V_ω satisfait les axiomes de ZF, sauf l'axiome de l'infini.

(2) On fixe une bijection σ entre $\mathcal{P}_f(\omega)$ (l'ensemble des parties finies de ω) et ω, et on définit une relation $\in_\sigma$ sur ω par $x \in_\sigma y$ si $x \in \sigma^{-1}(y)$. Montrer que $(V_\omega, \in)$ se plonge dans $(\omega, \in_\sigma)$ de manière unique.

(3) Montrer que si σ satisfait que $x \in \sigma^{-1}(y)$ implique $x < y$, alors le plongement est un isomorphisme.

(4) Donner un exemple de tel σ.

Exercice 4. Ensembles dont la cloture transitive est petite.

On se place dans un modèle $\mathcal{U}$ de ZFC+AF. Si x est un ensemble on note par $\mathrm{ct}(x)$ la clôture transitive de x. On définit pour un cardinal κ,

$$H(\kappa) = \{x : |\,\mathrm{ct}(x)| < \kappa\}\,.$$

(1) Montrer que $H(\kappa) \subseteq V_\kappa$ pour tout κ et conclure que $H(\kappa)$ est un ensemble.

(2) Soit κ régulier. Montrer que $H(\kappa) = V_\kappa$ ssi κ est fortement limite.

(3) Montrer les propriétés suivantes de $H(\kappa)$:
— $H(\kappa)$ est transitif ;
— $H(\kappa) \cap \mathcal{O}n = \kappa$;
— $x \in H(\kappa)$, alors $\bigcup x \in H(\kappa)$;
— si $x, y \in H(\kappa)$, alors $\{x, y\} \in H(\kappa)$;
— si $x \in H(\kappa)$ et $y \subseteq x$, alors $y \in H(\kappa)$;
— si κ est régulier, alors

$$\forall x\ x \in H(\kappa) \iff x \subseteq H(\kappa) \wedge |x| < \kappa.$$

(4) Montrer que si κ est régulier et non dénombrable, alors $H(\kappa) \models \mathrm{ZFC} - \mathsf{P}$. En conclure que l'axiome des parties n'est pas une conséquence des autres axiomes de ZFC.