
TD 5 – Plus de modèles intérieurs

Exercice 1. Ensembles dont la clôture transitive est petite.

On se place dans un modèle \mathcal{U} de ZFC+AF. Si x est un ensemble on note par $\text{ct}(x)$ la clôture transitive de x . On définit pour un cardinal κ ,

$$H(\kappa) = \{x : |\text{ct}(x)| < \kappa\}.$$

- (1) Montrer que $H(\kappa) \subseteq V_\kappa$ pour tout κ régulier et conclure que $H(\kappa)$ est un ensemble.
- (2) Soit κ régulier. Montrer que $H(\kappa) = V_\kappa$ ssi κ est fortement limite.
- (3) Montrer les propriétés suivantes de $H(\kappa)$:
 - $H(\kappa)$ est transitif;
 - $H(\kappa) \cap \mathcal{O}_n = \kappa$;
 - $x \in H(\kappa)$, alors $\bigcup x \in H(\kappa)$;
 - si $x \in H(\kappa)$ et $y \subseteq x$, alors $y \in H(\kappa)$;
 - si κ est régulier, alors

$$\forall x \ x \in H(\kappa) \iff x \subseteq H(\kappa) \wedge |x| < \kappa.$$

- (4) Montrer que si κ est régulier et non dénombrable, alors $H(\kappa) \models \text{ZFC} - \text{P}$. En conclure que l'axiome des parties n'est pas une conséquence des autres axiomes de ZFC.

Exercice 2. Deux relations fonctionnelles utiles

On se place dans un modèle \mathcal{U} de ZF.

- (1) Montrer qu'il existe une relation fonctionnelle bijective sans paramètres entre les suites finies d'ordinaux et les ordinaux.
- (2) Montrer qu'il existe une relation fonctionnelle bijective sans paramètres entre ω et V_ω .

Exercice 3. Le retour de l'appartenance tordue.

- (1) En utilisant les notions de formules bornées vues en cours, donner une preuve complète du fait que V_ω satisfait les axiomes de ZF, sauf l'axiome de l'infini.
- (2) On fixe une bijection σ entre $\mathcal{P}_f(\omega)$ (l'ensemble des parties finies de ω) et ω , et on définit une relation \in_σ sur ω par $x \in_\sigma y$ si $x \in \sigma^{-1}(y)$. Montrer que (V_ω, \in) se plonge dans (ω, \in_σ) de manière unique.
- (3) Montrer que si σ satisfait que $x \in \sigma^{-1}(y)$ implique $x < y$, alors le plongement est un isomorphisme.
- (4) Donner un exemple de tel σ .

Exercice 4. Modèles de Fränkel–Mostowski, suite

On travaille dans un modèle \mathcal{U} de ZF ayant un ensemble \mathcal{A} non vide d'atomes. On définit par induction transfinitie :

$$\begin{aligned} W_0 &= \mathcal{A} \\ W_{\alpha+1} &= \mathcal{P}(W_\alpha) \\ W_\lambda &= \bigcup_{\alpha < \lambda} W_\alpha \quad \text{si } \lambda \text{ limite.} \end{aligned}$$

- (1) Soit W la classe $W = \bigcup_{\alpha} W_{\alpha}$. Montrer que $(W, \in|_W) \models \text{ZF} - \text{AF}$.
- (2) Montrer que W satisfait

$$\forall a \quad a \neq \emptyset \Rightarrow \exists b \in a \ (b = \{b\} \vee a \cap b = \emptyset).$$

En déduire qu'un élément a de W est un atome (au sens de W) si et seulement si $a \in W_0$.

- (3) Montrer que $\mathcal{U} \models W = W^W$.