Partiel de théorie des ensembles

Durée : 3h. Tous documents interdits.

Dans tout l'énoncé, sauf mention explicite du contraire, on se place dans ZFC.
Les six exercices sont indépendants.

Exercice 1. Une application du lemme de Fodor.
Soit $S \subseteq \omega_1$ stationnaire. On suppose que $S = \bigsqcup_{\alpha<\omega_1} S_\alpha$, où aucun des S_α n'est stationnaire ou vide.

1. Montrer que l'ensemble $S \setminus \{\min(S_\alpha) : \alpha < \omega_1\}$ n'est pas stationnaire.
2. En déduire que l'ensemble $\{\min(S_\alpha) : \alpha < \omega_1\}$ est stationnaire.

Exercice 2. Principe du choix.
On se place dans un modèle $(\mathcal{U}, \in)$ de ZF. On dit que $\mathcal{U}$ satisfait le **principe du choix** si on peut trouver une relation $<$ sans paramètres qui définit un bon ordre sur $\mathcal{U}$.

1. Montrer que si $\mathcal{U}$ satisfait le principe du choix, alors il satisfait l'axiome du choix.
2. Montrer que si tout élément de $\mathcal{U}$ est définissable en termes d'ordinaux (i.e. si $\mathcal{U} = DO$), alors $\mathcal{U}$ satisfait le principe du choix.
3. La réciproque est-elle vraie ?

La consistance relative du principe de choix se prouve en considérant l'univers constructible L de Gödel, que vous verrez au second semestre.

Exercice 3. Un peu de cofinalité.
Montrer que si κ est un cardinal infini, alors $\kappa < \kappa^{\mathrm{cof}(\kappa)}$.

Exercice 4. Des sous-ensembles bizarres construits par récurrence transfinie.

1. Construire un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ qui intersecte toute droite en exactement deux points.
2. Construire un sous-ensemble A de $\mathbb{R}$ tel que pour tout fermé F de $\mathbb{R}$ de cardinal $2^{\aleph_0}$, les ensembles A et $\mathbb{R} \setminus A$ intersectent F.

Exercice 5. Opérations sur les cardinaux.

1. Soit I un ensemble, soient $(\kappa_i)_{i\in I}$ et $(\kappa'_i)_{i\in I}$ deux familles de cardinaux infinis indexées par I. Supposons que pour tout $i \in I$, $\kappa_i < \kappa'_i$. A-t-on nécessairement $\sum_{i\in I} \kappa_i < \sum_{i\in I} \kappa'_i$?
2. Soient $\kappa \geqslant 2$ et $\mu \geqslant 1$ deux cardinaux dont au moins un des deux est infini. Montrer que $\max(\kappa, 2^\mu) \leqslant \kappa^\mu \leqslant \max(2^\kappa, 2^\mu)$.

Exercice 6. Z+AF n'entraine pas ZF+AF.
On appelle Z la théorie formée de
— l'axiome d'extensionnalité,
— l'axiome de la paire,
— l'axiome de l'union,
— l'axiome de l'ensemble des parties,
— le schéma d'axiomes de compréhension,
— l'axiome de l'infini.
On suppose que ZF+AF est cohérente, et on travaille dans un modèle $\mathcal{U}$ de ZF+AF.

1. Donner les énoncés du premier ordre correspondant aux axiomes de Z.
2. Montrer que $V_{\omega+\omega}$ est un modèle de Z. Quels sont ses ordinaux ?
3. En vue d'aboutir à une contradiction, on suppose que $V_{\omega+\omega}$ satisfait le schéma d'axiomes de remplacement.
   (a) Montrer que l'application $\omega \to \omega + \omega$ qui à n associe $\omega + n$ définit une relation fonctionnelle sur $V_{\omega+\omega}$.
   (b) En déduire l'existence, du point de vue de $V_{\omega+\omega}$, d'un ensemble contenant tous les ordinaux.
   (c) Aboutir à une contradiction.
4. Conclure que si Z+AF est cohérente, alors ZF+AF n'est pas une conséquence de Z+AF.