Axiome du choix dans les modèles de Fraenkel-Mostowski

François Le Maître

24 novembre 2019

On va reprendre en détail la preuve du fait que si $(\mathcal{U}, \in)$ satisfait l'axiome du choix, alors $(\mathcal{U}, \in')$ satisfait l'axiome du choix, où $\in'$ est la relation d'appartenance tordue donnée par $x \in' y$ ssi $x \in F(y)$, $y = F(x)$ étant une relation fonctionnelle bijective $\mathcal{U} \to \mathcal{U}$. Plus précisément, on devrait en fait écrire que $x \in' y$ ssi $\exists z, z = F(y) \wedge x \in z$. On a le lemme important suivant, qu'on a utilisé explicitement lorsqu'on a démontré le schéma d'axiomes de remplacement dans $(\mathcal{U}, \in')$:

Lemme 1. À toute relation R sur $(\mathcal{U}, \in')$ correspond une relation R' sur $(\mathcal{U}, \in)$ avec la même interprétation, et vice-versa.

Démonstration. Le sens direct est immédiat d'après la définition même de $\in'$, et la réciproque vient en remarquant que $x \in y$ ssi $x \in F^{-1}(y)$, ce qui permet de voir $(\mathcal{U}, \in)$ comme un modèle de Fraenkel-Mostowski obtenu à partir de $(\mathcal{U}, \in')$ (pour ce faire, on utilise le fait que F^{-1} peut se voir comme une relation fonctionnelle sur $(\mathcal{U}, \in')$, ce qui découlait du sens direct !). $\square$

On a vu les interprétations explicites suivantes : $\emptyset' = F^{-1}(\emptyset)$, et $\mathcal{P}'(a) = F^{-1}[F^{-1}(\mathcal{P}(F(a))]$. Rappelons que la dernière égalité découlait du fait que $x \subseteq' y$ ssi $F(x) \subseteq F(y)$ ssi $F(x) \in \mathcal{P}(F(y))$ ssi $F(x) \in' F^{-1}(\mathcal{P}(F(y))$.

On va voir des variantes de l'axiome du choix. Remarquons d'abord que comme toute application peut être vue comme une relation fonctionnelle dont le domaine est un ensemble (et vice-versa d'après le remplacement), on peut demander l'existence de relations fonctionnelles de choix plutôt que de fonctions de choix, ce qui fait formellement de l'axiome du choix un schéma d'axiomes, mais nous simplifie la vie au vu du lemme précédent.

Lemme 2. Les schémas d'énoncés suivants sont équivalents dans tout modèle de ZF, et équivalent eux même à l'axiome du choix.

(i) Pour tout ensemble a, il existe une relation fonctionnelle $c : \mathcal{P}(a) \setminus \{\emptyset\} \to a$ telle que pour tout $x \in \mathcal{P}(a)$ non vide, on ait $c(x) \in x$.

(ii) Pour tout ensemble a, il existe une relation fonctionnelle $c : \mathcal{P}(a) \to a$ telle que pour tout $x \in \mathcal{P}(a)$ non vide, on ait $c(x) \in x$.

(iii) Pour tout ensemble b, il existe une relation fonctionnelle $c : b \to \cup b$ telle que pour tout $x \in b$ non vide, on ait $c(x) \in x$.

Démonstration. L'implication de (i) vers (ii) est claire, et l'implication de (ii) vers (iii) vient en posant $a = \cup b$, puisqu'alors chaque élément de b est inclus dans a. Enfin, l'implication de (iii) vers (i) vient en considérant $b = \mathcal{P}(a) \setminus \{\emptyset\}$, et en remarquant qu'alors $\cup b = a$. $\square$

Supposons maintenant que $(\mathcal{U}, \in)$ satisfasse l'axiome du choix, que l'on utilisera sous la forme précédente. On va montrer que l'axiome du choix sous cette même forme est satisfait dans $(\mathcal{U}, \in')$. Soit donc a un élément de $\mathcal{U}$. Alors $\mathcal{P}'(a) = F^{-1}[F^{-1}(\mathcal{P}(F(a))]$.

On cherche une relation fonctionnelle $y = c(x)$ telle que pour tout $x \in' \mathcal{P}'(a)$ distinct de $\emptyset'$, on ait $c(x) \in' x$. Ceci équivaut à demander que pour tout x tel que $F(x) \in F^{-1}(\mathcal{P}(F(a)))$ et $F(x) \neq \emptyset$, on ait $c(x) \in F(x)$. Soit alors $b = F^{-1}(\mathcal{P}(F(a)))$, soit $c_1 : b \to \cup b$ une relation fonctionnelle de choix donnée par l'item (iii) du lemme précédent.

Alors $c := c_1 \circ F$ est la relation fonctionnelle voulue : si $x \in' \mathcal{P}'(a)$ est distinct de $\emptyset'$, on a que $F(x)$ est distinct de $\emptyset$, et $c_1(F(x)) \in F(x)$, autrement dit $c(x) \in' x$.