Partiel de théorie des ensembles

Durée : 2h. Tous documents interdits.
Dans tout l'énoncé, sauf mention explicite du contraire, on se place dans ZFC.

Exercice 1. Retour sur les ensembles bien ordonnés.
On rappelle qu'un plongement entre ensembles (strictement) ordonnés $(X, <_X)$ et $(Y, <_Y)$ est une application $f : X \to Y$ telle que pour tous $x, x' \in X$, on a $x <_X x'$ ssi $f(x) <_Y f(x')$. Montrer que si $(X, <_X)$ et $(Y, <_Y)$ sont deux ensembles bien ordonnés, alors l'un des deux se plonge dans l'autre, et que si chacun se plonge dans l'autre, alors ils sont isomorphes.

Solution de l'exercice 1. Comme tout ensemble bien ordonné est isomorphe à un unique ordinal, il suffit de le montrer pour les ordinaux ; or deux ordinaux sont toujours comparables et si f est un plongement $\alpha \to \beta$ on a vu que $f(\gamma) \geqslant \gamma$ pour tout γ, en particulier on a alors $\alpha \subseteq \beta$, donc s'il y a à la fois un plongement de α dans β et de β dans α, alors $\alpha = \beta$, en particulier ils sont isomorphes.

Exercice 2. Une restriction sur $2^{\aleph_0}$.
Montrer que $\aleph_\omega \neq 2^{\aleph_0}$.

Solution de l'exercice 2. Dans le cas contraire, par définition de $\aleph_\omega$ on aurait $2^{\aleph_0} = \bigcup_{n<\omega} \aleph_n$ où $\aleph_n < 2^{\aleph_0}$, et donc par le lemme de König,

$$2^{\aleph_0} \leqslant \sum_{n\in\omega} \aleph_n < \prod_{n\in\omega} 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph_0},$$

ce qui est contradictoire.

Exercice 3. Une application du lemme de Fodor.
Soit $\mathcal{F} = (F_i)_{i\in I}$ une famille d'ensembles finis indexée par un ensemble I de cardinal $\aleph_1$. On va montrer qu'il existe $J \subseteq I$ de cardinal $\aleph_1$ et un ensemble fini F tels que pour tous $i, j \in J$ distincts, $F_i \cap F_j = F$.

1. Montrer que l'on peut supposer que $I = \omega_1$ et que chaque F_i est un sous-ensemble de ω_1.
2. Montrer qu'il existe un ensemble stationnaire S et un ordinal $\gamma < \omega_1$ tel que pour tout $\alpha \in S$,
$$\sup(\alpha \cap F_\alpha) = \gamma.$$
3. Montrer que l'on peut trouver $S' \subseteq S$ de cardinal $\aleph_1$ et un ensemble fini F tels que pour tout $\alpha \in S'$, $F_\alpha \cap \alpha = F$.
4. Construire par récurrence transfinie une famille strictement croissante $(\alpha_\lambda)_{\lambda\in\omega_1}$ d'ordinaux telle pour tout $\lambda \in \omega_1$, $\alpha_\lambda \in S'$ et de plus, $\alpha_\lambda > \sup(\bigcup_{\lambda'<\lambda} F_{\alpha_{\lambda'}})$.
5. Montrer que $J = \{\alpha_\lambda : \lambda \in \omega_1\}$ est l'ensemble d'indices voulu.

Solution de l'exercice 3.

1. I est en bijection avec ω_1 donc il est clair qu'on peut supposer $I = \omega_1 = \aleph_1$. La réunion des F_i a pour cardinal au plus $\aleph_0 \cdot \aleph_1 = \aleph_1$, donc quitte à utiliser une injection φ de $\bigcup_{i\in I} F_i$ dans $\aleph_1$ et considérer $F'_i = \varphi(F_i)$, on peut supposer que chaque F_i est un sous-ensemble de ω_1.
2. Découle du lemme de Fodor en considérant $f : \alpha \mapsto \sup(\alpha \cap F_\alpha)$ (par définition le sup de l'ensemble vide est 0) qui est régressive car lorsque $\alpha \cap F_\alpha \neq \emptyset$, $\alpha \cap F_\alpha$ admet un maximum qui est $< \alpha$.
3. Il s'agit d'une application du lemme des tiroirs : pour $\alpha \in S$, chaque $F_\alpha \cap \alpha$ est un sous-ensemble fini de γ, or il y en a $\aleph_0$, et $|S| = \aleph_1$ car S est stationnaire, en particulier non borné. D'où l'existence du F et S' voulus. Remarquons qu'en particulier, F est contenu dans tous les F_α pour $\alpha \in S'$.

4. C'est immédiat puisque S' est non borné.
5. Pour chaque λ, on a $\alpha_\lambda > \sup(\bigcup_{\lambda'<\lambda} F_{\alpha_{\lambda'}})$, en particulier $F_{\alpha_{\lambda'}} \cap \alpha_\lambda = F_{\alpha_{\lambda'}}$. Donc pour tout $\lambda > \lambda'$, on a
$$F_{\alpha_\lambda} \cap F_{\alpha_{\lambda'}} = F_{\alpha_\lambda} \cap (\alpha_\lambda \cap F_{\alpha_{\lambda'}}) = F_{\alpha_\lambda} \cap \alpha_\lambda \cap F_{\alpha'_\lambda} = F \cap F_{\alpha'_\lambda} = F.$$

Exercice 4. Dérivation de Cantor-Bendixson.

Soit $(X, <)$ un ensemble totalement ordonné. Un élément de $x \in X$ est dit **isolé** si il vérifie les deux conditions suivantes :

— soit x est le minimum de X, soit l'ensemble $\{y \in X : y < x\}$ a un maximum ;
— soit x est le maximum de X, soit l'ensemble $\{y \in X : y > x\}$ a un minimum.

Étant donné un ensemble totalement ordonné $(X, <)$, sa **dérivée de Cantor-Bendixson** est l'ensemble totalement ordonné X' muni de l'ordre induit par $<$, où
$$X' = \{x \in X : x \text{ n'est pas isolé}\}.$$

On définit alors par récurrence transfinie sur α ordinal la α-ième dérivée de Cantor-Bendixson de X par :

— $X^{(0)} = X$
— $X^{(\alpha+1)} = (X^{(\alpha)})'$
— si β limite, $X^{(\beta)} = \bigcap_{\alpha<\beta} X^{(\alpha)}$

1. Expliciter la construction par récurrence transfinie en utilisant le théorème du cours (on précisera la relation fonctionnelle H et on vérifiera les hypothèses du théorème).
2. Montrer que si X est un ordinal, alors X' est l'ensemble des ordinaux limites de X.

On appelle **rang de Cantor-Bendixson** d'un ensemble totalement ordonné $(X, <)$ le plus petit ordinal α tel que $X^{(\alpha)} = X^{(\alpha+1)}$ et on le note $\mathrm{rg}_{CB}(X)$.

3. Montrer que le rang de Cantor-Bendixson est bien défini.
4. Montrer que si α est un ordinal, alors $\alpha^{(\mathrm{rg}_{CB}(\alpha))} = \emptyset$.
5. Montrer que pour tout ordinal α, $\mathrm{rg}_{CB}(\alpha) \leqslant \alpha$.
6. Quel est le rang de Cantor-Bendixson de $\omega + 1$? De $\omega \times \omega + 1$?
7. Trouver un ordinal de rang de Cantor-Bendixson ω.

On s'intéresse désormais à déterminer le rang de Cantor-Bendixson de ω_1.

8. Montrer que si $X \subseteq \omega_1$ est un club, alors X' est également un club.
9. Montrer que pour tout $\alpha < \omega_1$, $\omega_1^{(\alpha)}$ est un club. Quel est son type d'ordre, i.e. l'ordinal auquel il est isomorphe ?
10. En déduire que $\mathrm{rg}_{CB}(\omega_1) = \omega_1$.
11. Montrer qu'en fait, pour tout cardinal κ régulier, $\mathrm{rg}_{CB}(\kappa) = \kappa$.

Solution de l'exercice 4.

1. C'est exactement la même chose que pour le DM, je ne détaille pas.
2. Soit α ordinal, si $\beta < \alpha$ est successeur, alors on écrit $\beta = \gamma+1$, et γ est le maximum de l'ensemble des éléments strictement plus petits que β, tandis que $\beta + 1$ est le minimum de l'ensemble des éléments strictement plus grands que β. Donc β est isolé. Si $\beta = 0$, β est isolé car c'est le minimum de α. Il suffit donc maintenant de montrer que les ordinaux limites ne sont pas isolés, or si β est limite on a que $\beta = \sup \beta$, en particulier β est le plus petit majorant de l'ensemble des éléments strictement plus petits que β, donc ce dernier ensemble n'a pas de maximum : β n'est pas isolé.

3. Comme les ordinaux forment une collection bien ordonnée, il suffit de montrer qu'il existe un tel α. Or si ce n'était pas le cas, la relation fonctionnelle $(X^{(\alpha)})_{\alpha\in\mathcal{O}n}$ serait donnerait une famille d'ensembles strictement décroissante, et en choisissant pour chaque α un $x_\alpha \in X_\alpha \setminus X_{\alpha+1}$ (via une fonction de choix sur X), on trouve une relation fonctionnelle injective de $\mathcal{O}_n$ dans X, ce qui est impossible.
4. Si ce n'est pas le cas, $\alpha^{(\mathrm{rg}_{CB}(\alpha))}$ est bien ordonné, donc il a un minimum, mais ce dernier doit être isolé, ce qui est absurde puisque $\alpha^{(\mathrm{rg}_{CB}(\alpha))} = \alpha^{(\mathrm{rg}_{CB}(\alpha))'}$.
5. Pour $\beta < \mathrm{rg}_{CB}(\alpha)$, on note $x_\beta = \min(\alpha^{(\beta)})$, ce qui est bien défini car α bien ordonné. De plus par construction x_β est isolé dans $\alpha^{(\beta)}$, et donc on a que $(x_\beta)_{\beta<\mathrm{rg}_{CB}(\alpha)}$ est un plongement, donc d'après l'exercice 1 on a $\mathrm{rg}_{CB}(\alpha) \leqslant \alpha$.
6. On a $(\omega+1)' = \{\omega\}$, puis $\{\omega\}' = \emptyset$ donc $\mathrm{rg}_{CB}(\omega+1) = 1$. En voyant $\omega\times\omega+1$ comme produit muni de l'ordre antilexicographique auquel on rajoute un élément ∞ plus grand que tout le monde, on remarque que les éléments non isolés sont les $(0,n)$ pour $n\in\omega$ ainsi que le maximum ∞, et en dérivant une seconde fois il ne reste que $\{\infty\}$, donc $\mathrm{rg}_{CB}(\omega\times\omega+1) = 2$.
7. On voit ω^ω comme ensemble d'applications à support fini muni de l'ordre antilexicographique, alors la n-ième dérivée est l'ensemble des applications f telles que f est nulle sur les n premières coordonnées, et non nulle sur la $n+1$-ème (preuve par récurrence). L'intersection de ces ensembles d'applications étant vide, on a donc $\mathrm{rg}_{CB}(\omega\times\omega) = \omega$.
8. X' est clairement fermé, car si (θ_n) est une suite strictement croissante d'éléments de X, $\sup_n \theta_n$ ne peut jamais être isolée dans X. X' est non borné : pour $\alpha < \omega_1$, on prend une telle suite en commençant par $\theta_0 > \alpha$, ce qui est possible car X non borné.
9. Le cas $\alpha = 0$ découle du fait que ω_1 est un club, le cas successeur est traité par la question précédente, le cas limite découle du fait qu'une intersection dénombrable de clubs est un club. Son type d'ordre est ω_1, car c'est un ensemble bien ordonné de cardinal $\aleph_1$ (c'est un club) qui se plonge dans ω_1, et on applique alors l'exercice 1.
10. Découle de la question précédente et de la question 5.
11. Je n'ai pas de meilleure réponse que de généraliser la preuve précédente, ce qui implique en particulier de généraliser la notion de club et la plupart des preuves qu'on a vu en cours, ce que l'on trouvera par exemple dans le bouquin Set Theory de Kunen. A titre indicatif, la définition générale d'un club sur un cardinal régulier κ est : c'est un sous-ensemble C de κ non borné tel que pour tout $\lambda < \kappa$, si $(x_i)_{i\in\lambda}$ est une famille strictement croissante d'éléments de C, alors son sup est dans C.