TD 1 – Moyennabilité

*La notation $F \Subset X$ signifie : F est un sous ensemble **fini** de X.*

Exercice 1. Caractérisations à la Følner de l'existence d'ensembles presques invariants.
Soit Γ un groupe et X un ensemble. Une action $\Gamma \curvearrowright X$ est dite *moyennable* si pour tout $S \Subset \Gamma$ non vide, tout $\epsilon > 0$, il existe $F \Subset X$ tel que,

$$|S \cdot F \triangle F| < \epsilon |F|,$$

où $S \cdot F = \bigcup_{s \in S} s \cdot F$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes à la moyennabilité de l'action $\Gamma \curvearrowright X$.

(i) $\forall S \Subset \Gamma$ non vide, $\forall \epsilon > 0, \exists F \Subset X$,

$$|\{x \in F : \exists s \in S, s \cdot x \notin F\}| < \epsilon |F|;$$

(ii) $\forall S \Subset \Gamma$ non vide, $\forall \epsilon > 0, \exists F \Subset X$,

$$|S \cdot F \setminus F| < \epsilon |F|;$$

(iii) $\forall S \Subset \Gamma, \forall \epsilon > 0, \exists F \Subset X, \forall s \in S$,

$$|s \cdot F \setminus F| < \epsilon |F|;$$

(iv) $\forall S \Subset \Gamma, \forall \epsilon > 0, \exists F \Subset X, \forall s \in S$,

$$|s \cdot F \triangle F| < \epsilon |F|;$$

Exercice 2. Équivariance et moyennabilité.
Soient $\Gamma \curvearrowright^{\alpha} X$ et $\Gamma \curvearrowright^{\beta} Y$ deux actions. Une application $\pi : X \to Y$ est dite (α, β)-équivariante si pour tout $x \in X$ et tout $\gamma \in \Gamma$ on a :

$$\pi(\alpha(\gamma) \cdot x) = \beta(\gamma) \cdot \pi(x).$$

Lorsque π est de plus bijective, on dit que π est un *isomorphisme* entre α et β.

1. Montrer que si α et β sont isomorphes alors α est moyennable ssi β est moyennable. En déduire qu'un groupe est moyennable ssi toutes ses actions transitives libres sont moyennables.
2. Montrer si π est (α, β)-equivariante et α est moyennable, alors β est moyennable. On pourra commencer par établir un analogue de la condition de Reiter pour la moyennabilité des actions.
3. En déduire que si Γ est moyennable, alors toutes ses actions sont moyennables.

Exercice 3. Actions libres moyennables.
Soit $\Gamma \curvearrowright X$ une action, Y un ensemble non vide, la Y-amplification de l'action sur X est l'action sur $X \times Y$ donnée par $\gamma \cdot (x, y) = (\gamma \cdot x, y)$.

1. Montrer que la Y-amplification d'une action est moyennable ssi l'action de départ est moyennable.
2. Montrer que si Γ admet une action libre moyennable, alors Γ est moyennable.
3. En déduire le fait suivant vu en cours : tout sous-groupe d'un groupe moyennable est moyennable.

*** Exercice 4. Action moyennable à stabilisateur moyennable.**
Montrer que si $\Gamma \curvearrowright X$ est transitive et moyennable, et si il existe $x_0 \in X$ tel que $\mathrm{Stab}_\Gamma(x_0)$ est moyennable, alors Γ est moyennable. En déduire le fait vu en cours que toute extension d'un groupe moyennable par un groupe moyennable est elle-même moyennable.

Exercice 5. Croissance et moyennabilité.

Soit Γ un groupe de type fini, sa *croissance* est la fonction $c_{\Gamma,S} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ donnée par $c_{\Gamma,S}(n) = |B_S(1_\Gamma, n)|$ où $B_S(1_\Gamma, n)$ désigne la boule de rayon n dans le graphe de Cayley de Γ par rapport au système de générateurs S. Enfin, on dit que Γ est à *croissance sous-exponentielle* si

$$\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{c_{\Gamma,S}(n)} = 1.$$

Dans le cas contraire, on dit que Γ est à *croissance exponentielle.*

1. Montrer que si Γ est à croissance sous-exponentielle, alors Γ est moyennable.
2. Donner un exemple de groupe à croissance exponentielle moyennable, et un exemple de groupe non moyennable à croissance exponentielle.

Exercice 6. Ensembles de Følner explicites.

Donner des suites de Følner explicites pour les groupes suivants :

1. Le groupe de l'allumeur de réverbère $\bigoplus_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}$.

* 2. Le groupe de Baumslag-Solitar $BS(1,2) = \langle t, a : tat^{-1} = a^2\rangle$.

Exercice 7. Action moyennable fidèle de $\mathbb{F}_2$.

Pour cet exercice, il sera utile de construire les actions de $\mathbb{F}_2$ comme des graphes de Schreier : des graphes orientés où chaque arête a pour couleur a ou b, et chaque sommet a exactement une arête entrante et sortante de chaque couleur.

1. Montrer que $\mathbb{F}_2$ admet une action moyennable transitive sur un ensemble infini.
2. Montrer que $\mathbb{F}_2$ admet une action moyennable transitive et fidèle. On pourra essayer de modifier le graphe de Cayley de $\mathbb{F}_2$ en un graphe de Schreier d'action moyennable.

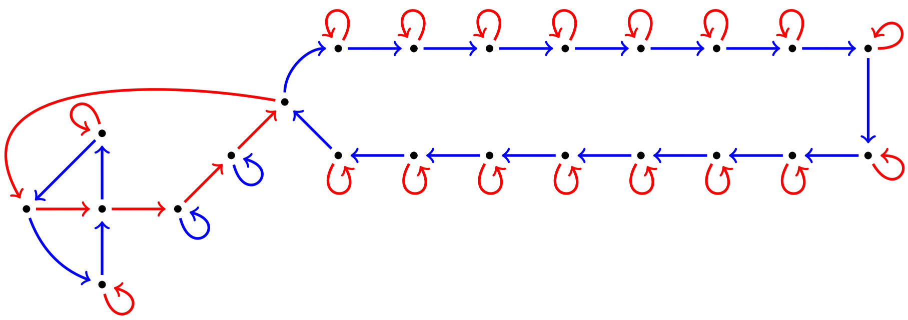

Figure 1. Un exemple d'action de $\mathbb{F}_2$ sur un ensemble fini, représentée comme graphe de Schreier.