TD 3 – Autour de la propriété de Powers

Exercice 1. Homéomorphismes hyperboliques.
Soit X un espace topologique séparé de cardinal au moins 3. Un homéomorphismes h de X est dit **hyperbolique** s'il admet deux points fixes s_h et r_h (s pour *source* et r pour *range*) tels que pour tout voisinages S de s et R de r, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $h^n(X \setminus S) \subseteq R$ et $h^{-n}(X \setminus R) \subseteq S$.

1. Montrer qu'étant donné h hyperbolique, le couple (s, r) satisfaisant la définition ci-dessus est unique, justifiant de le noter plutôt (s_h, r_h).
2. On suppose X métrisable, montrer que si un homéomorphisme h est hyperbolique, les seules mesures de probabilité boréliennes qu'il préserve sont δ_{s_h} et δ_{r_h}.
3. Deux homéomorphismes hyperboliques de X sont **transverses** s'ils n'ont pas de point fixe commum. Montrer que si h_1 et h_2 sont transverses, alors il existe une suite $(n_i)_{i\in\mathbb{N}}$ d'entiers naturels strictement croissante tels que $h_1^{n_i} h_2 h_1^{-n_i}$ sont deux à deux transverses.

4. Donner un exemple de couple d'homéomorphismes hyperboliques transverses sur le cercle. En déduire que $\mathbb{F}_2$ admet une action *fidèle* par homéomorphisme sur le cercle sans mesure de probabilité invariante [1].

Exercice 2. Actions fortement hyperboliques.
Une action α par homéomorphisme d'un groupe Γ sur un espace topologique séparé X est dite *fortement hyperbolique* $\alpha(\Gamma)$ contient deux homéomorphismes hyperboliques transverses. On note alors X_0 l'ensemble des points fixes des éléments hyperboliques de Γ.

1. Montre que X_0 est Γ-invariant.
2. Montrer que l'action de Γ sur X_0 est topologiquement transitive (toutes ses orbites sont denses).
3. On suppose que Γ agit hautement fidèlement sur X_0, c'est-à-dire que pour tout sous-ensemble fini $F \Subset \Gamma \setminus \{1\}$, il existe $x \in X$ tel que $\gamma x \neq x$ pour tout $\gamma \in F$. Montrer que Γ vérifie la propriété de Powers.

Exercice 3. Actions sur des arbres.
Soit T un arbre. On définit son bord ∂T comme étant l'ensemble des chemins géodésiques infinis (copies du graphe $(\mathbb{N}, \{(n, n+1) : n \in \mathbb{N}\})$), deux chemins étant identifiés si leur différence symétrique est finie. Etant donné un automorphisme α de T, on définit

$$\rho(\alpha) = \min(\{d(x, \alpha(x)) : x \in T\}.$$

1. Montrer que si $\rho(\alpha) = 1$, il est possible que α inverse une arête.
2. On suppose que ce n'est pas le cas, montrer que α admet un chemin géodésique biinfini (copie du graphe $(\mathbb{Z}, \{(n, n+1) : n \in \mathbb{Z}\})$) sur lequel elle agit par translation. On dit alors que α est hyperbolique.

1. On se renseignera au besoin sur le *lemme du ping-pong*.

3. Un *demi-arbre* est une composante connexe de T privé d'une arête. L'*ombre* d'un demi-arbre est l'ensemble des éléments du bord contenus dans ce demi-arbre. Montrer que les ombres de demi-arbres forment une base de topologie séparée sur ∂T.
4. Montrer que tout automorphisme hyperbolique de T induit un homéomorphisme hyperbolique de ∂T.
5. En déduire que $\mathbb{F}_2$ vérifie la propriété de Powers.

   La classe des groupes auxquels on peut appliquer cet exercice est beaucoup plus vaste ; on peut par exemple montrer que $BS(2,3) = \langle t, a : ta^2t^{-1} = a^3 \rangle$ *a la propriété de Powers via son action sur un arbre.*

Exercice 4. Propriété de Dixmier.
Soit A une C^*-algèbre unitale. Elle vérifie la propriété de Dixmier si pour tout $a \in A$, l'adhérence de l'enveloppe convexe des uau^* pour $u \in \mathcal{U}(A)$ intersecte le centre de A.

1. Montrer que si le centre de A est trivial et A vérifie la propriété de Dixmier alors A est simple (elle n'a pas d'idéal bilatère fermé non trivial).
2. Montrer que si de plus A admet une trace τ, alors pour tout $a \in A$, $\tau(a)1$ est dans l'adhérence de l'enveloppe convexe des uau^* pour $u \in \mathcal{U}(A)$.
3. Conclure que si A est de centre trivial et vérifie la propriété de Dixmier, alors elle a au plus une trace.

Exercice 5. Un lemme utile.
Soit $(x_i)_{i=1}^N$ une famille finie d'éléments de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ de norme au plus 1, et $(\mathcal{H}_i)_{i=1}^N$ une famille de sous espaces fermés de $\mathcal{H}$ deux à deux orthogonaux. On suppose que pour tout $i \in \{1, ..., N\}$, on a $x_i(\mathcal{H}_i^\perp) \subseteq \mathcal{H}_i$. Montrer que $\left\| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \right\| \leqslant \frac{2}{\sqrt{N}}$. On pourra s'inspirer de ce qui a été fait pour démontrer que la propriété de Powers implique l'unicité de la trace.

Exercice 6. Retour sur la propriété de Powers.
Soit Γ un groupe dénombrable vérifiant la propriété de Powers. Montrer que pour tout $a \in C_r^*(\Gamma)$, l'adhérence de l'enveloppe convexe des $u_\gamma a u_\gamma^*$ contient $\tau(a)1$. On pourra commencer par le cas où $\tau(a) = 0$ et $a \in \mathbb{C}[\Gamma]$. En déduire que Γ est C^*-simple, et que $C_r^*(\Gamma)$ a une unique trace.