TD 1 – C^*-algèbres non unifères

Exercice 1. Unitarisation de C^*-algèbre.
Soit A une C^*-algèbre non nécessairement unifère.

1. Montrer que $\lambda : A \to \mathcal{B}(A)$ définie par $\lambda(a)b = ab$ est une isométrie.
2. On note $\tilde{A}$ l'algèbre engendrée par $\lambda(A)$ et l'identité sur A, que l'on note 1. Montrer que l'application $*$ donnée par
$$(\lambda(a) + \mu 1)^* = \lambda(a^*) + \bar{\mu}1$$
est bien définie et involutive.
3. Montrer que $\tilde{A}$ est une C^* algèbre pour la norme induite par $\mathcal{B}(A)$.

Solution de l'exercice 1.

1. Comme A est une algèbre de Banach, $\|\lambda(a)\| \leqslant \|a\|$. Par ailleurs $\|\lambda(a)a^*\| = \|a\|^2$ donc λ est bien une isométrie.
2. Si A est unitale, on a que l'algèbre engendrée par A et 1 est égale à A, l'application en question est bien définie et est l'adjoint sur $\lambda(A)$ identifié à A. Dans le cas contraire, A et $\mathbb{C}1$ sont en somme directe. Un calcul immédiat montre que $\lambda(A) \oplus \mathbb{C}1$ est une algèbre. Il est alors clair que l'application est bien définie et involutive.
3. Les seuls points non immédiats sont l'identité de C^* algèbre et la complétude, dans le cas non unital. Le quotient $\mathcal{B}(A)/\lambda(A)$ est muni de la norme quotient, qui se restreint à $\lambda(A) \oplus \mathbb{C}1/\lambda(A)$ en une norme sur $\mathbb{C}$, qui est donc un multiple de la norme usuelle. Soit $\lambda(a_n) + \kappa_n 1$ de Cauchy, alors κ_n converge vers κ donc a_n de Cauchy donc converge vers a donc on a bien complétude.

   Pour la C^* identité, on montre d'abord que $\star$ est de norme $\leqslant 1$ en utilisant une formule générale (à écrire), puis :
$$\begin{aligned}
\|(\lambda(a) + \mu 1)(\lambda(a*) + \bar{\mu}1)\| &= \left\|\lambda(a^*a + \mu a^* + \bar{\mu}a) + |\mu|^2 1\right\| \\
&= \sup_{x \in (A)_1} \left\|(a^*a + \mu a^* + \bar{\mu}a)x + |\mu|^2 x\right\| \\
&\geqslant \sup_{x \in (A)_1} \left\|x^*(a^*a + \mu a^* + \bar{\mu}a)x + |\mu|^2 x^*x\right\| \\
&= \sup_{x \in (A)_1} \|(ax + \mu x)^*(ax + \mu x)\| \\
&= \sup_{x \in (A)_1} \|ax + \mu x\|^2 \\
&= \|\lambda(a) + \mu 1\|^2 .
\end{aligned}$$

Exercice 2. Calcul fonctionnel sans unité.
Soit A une C^*-algèbre non unifère. Soit $\tilde{A}$ son unitarisation telle que définie à l'exercice précédent. Etant donnée $F \subseteq \tilde{A}$, on note $C^*(F)$ la plus petite C^*-algèbre contenant F. Soit $a \in A$ normal, soit $\psi : C^*(1, a) \to \mathcal{C}(\mathrm{Sp}(a))$ l'isomorphisme de C^*-algèbre fourni par le calcul fonctionnel. Qu'elle est l'image de $C^*(a) \subseteq A$ par ψ ?

Exercice 3. Unités approchées.
Soit A une C^*-algèbre non unifère. On cherche une suite généralisée d'unités approchées pour A, c'est à dire $(e_n)_n$ telle que $0 \leqslant e_n < 1$, $e_m \leqslant e_n$ si $m \leqslant n$ et $\lim_n \|a - ae_n\| = 0$ pour tout $a \in A$.

1. Montrer que si on a une telle suite, alors on a également $\lim_n \|a - e_n a\| = 0$ pour tout $a \in A$

On va plus généralement montrer que si I est un idéal bilatère dans A, on peut trouver une suite généralisée dans I qui satisfait $\lim_n \|a - ae_n\| = 0$ pour tout $a \in \bar{I}$. On fixe donc un tel idéal I. On travaille dans l'unitarisation $\tilde{A}$ de A dont on note 1 l'unité.

2. Montrer que I reste un idéal de $\tilde{A}$.
3. Montrer que l'ensemble $(I_+)_1$ des éléments positifs de I qui sont de norme < 1 est filtrant. On pourra utiliser la fonction $x \mapsto x(1+x)^{-1}$.
4. Montrer que si $x \in I_+$ et $0 \leqslant e \leqslant 1$, alors
$$\|x - xe\|^2 \leqslant \|x(1-e)x\|.$$
5. Montrer que la suite généralisée $(e_n)_{n\in(I_+)_1}$ définie par $e_n = n$ satisfait que pour tout $x \in I_+$, $\lim_n \|x(1-e_n)x\| = 0$.
6. Conclure. On pourra commencer par remarquer que si $x \in I$,
$$\|x - xe\|^2 = \|(1-e)x^*x(1-e)\|.$$
7. Montrer que quand A est séparable, on peut en fait trouver une unité approchée dans I indexée par $\mathbb{N}$.

Solution de l'exercice 3.

1. Les e_n sont autoadjoints, il suffit de passer à l'adjoint.
2. Le calcul est direct une fois qu'on se souvient que $\tilde{A} = A \oplus \mathbb{C}1$.
3. On remarque d'abord que I_+ est filtrant : si $0 \leqslant a$ et $0 \leqslant b$ alors par définition $a \leqslant a+b$ et $b \leqslant a+b$, et si $a, b \in I$ alors $a+b \in I$. La clé est alors de montrer que la fonction f en question (à valeur dans I puisque ce dernier est un idéal) est croissante : si $0 \leqslant a \leqslant b$ alors $f(a) \leqslant f(b)$. Pour cela on remarque que $f(x) = 1 - (1+x)^{-1}$, et on se souvient que le passage à l'inverse inverse l'ordre pour les éléments positifs inversibles. On utilise également $g(y) = y(1-y)^{-1}$ l'inverse de $x \mapsto f(x)$. définie sur les positifs de norme < 1 pour bien se ramener au fait que I_+ est filtrant.
4. Utiliser la C^* identité puis le fait que $x(1-e)^2x \leqslant x(1-e)x$.
5. On commence par trouver une suite e_n qui va bien en faisant un calcul fonctionnel bien choisi pour rester dans I : on prend une fonction f_n qui envoie 0 sur 0 donnée par $f_n(x) = nx(1+nx)^{-1}$. Alors tout se passe dans la C^* algèbre abélienne engendrée par x, où il est clair que c'est ok (cv uniforme sur tout compact de $t \mapsto \frac{t^2}{1+nt}$ vers la fonction nulle (c'est une fonction croissante)). On remarque que ça reste vrai si $e \geqslant e_n$ car alors $x(1-e)x \leqslant x(1-e_n)x$.
6. $x^*x \in I$ donc on peut appliquer les deux question précédente et trouver que
$$\|x^*x - x^*xe_n\| \to 0,$$
en particulier $\|(1-e_n)x^*x(1-e_n)\| \to 0$ et donc d'après l'indication $\|x - xe_n\|^2 \to 0$. Ensuite si $x \in \bar{I}$, la continuité de la multiplication fait qu'on a le même résultat.

Exercice 4. Idéaux et quotients.

Soit A une C^*-algèbre.

1. Montrer que tout idéal bilatère fermé de A est stable par $*$.
2. Montrer que si I est un idéal bilatère fermé de A, alors A/I est une C^*-algèbre pour la norme quotient. On pourra d'abord montrer que pour tout $x \in A$,
$$\|x\|_{A/I} = \inf_{e\in(I_+)_1} \|x - xe\|$$

Solution de l'exercice 4.

1. On utilise le truc précédent : $\|a^* - ea^*\| = \|a - ae\| \to 0$ et $ea^* \in I$ donc par fermeture $a^* \in I$.
2. Il est clair que $\|x\|_{A/I} \leqslant \|x - xe\|$ pour tout $e \in I$ puisque I est un idéal. Dans l'autre sens : si (e_n) est une suite approchée de l'identité, $x \in A$ et $y \in I$ alors comme $0 \leqslant 1 - e_n \leqslant 1$ on a $\|1 - e_n\| \leqslant 1$, et donc
$$\begin{aligned}\|x + y\| &\geqslant \|(x + y)(1 - e_n)\| \\ &\geqslant \liminf_n \|x - xe_n + y - ye_n\| \\ &= \liminf_n \|x - xe_n\|\end{aligned}$$
car le second terme tend vers zéro. Ensuite, il suffit de montrer l'inégalité $\|x\|^2 \leqslant \|x^*x\|$, mais cette dernière découle du fait que $\|x - xe\|^2 = \|x(1 - e)\|^2 = \|(1 - e)x^*x(1 - e)\| \leqslant \|x^*x(1 - e)\| = \|x^*x - x^*xe\|$.

Exercice 5. Algèbre des multiplicateurs.
Soit $A \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ une C^*-algèbre non dégénérée (il n'y a pas de vecteur ξ non nul tel que $A\xi = \{0\}$).

1. Montrer que si (e_n) est une suite d'unités approchées pour A, alors (e_n) converge fortement vers l'identité. On pourra commencer par montrer qu'elle converge faiblement vers un certain $x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.
2. Montrer que si $x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ satisfait $xa = 0$ pour tout $a \in A$ alors $x = 0$, et que si $ax = 0$ pour tout $a \in A$ on a également $x = 0$.

L'algèbre des multiplicateurs de A est l'ensemble des $x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tels que $xA \subseteq A$ et $Ax \subseteq A$. On le note $\mathcal{M}(A)$.

3. Montrer que $\mathcal{M}(A)$ est une C^*-algèbre unitale qui contient A et qui est contenue dans A'', et que A en est un idéal essentiel : il intersecte non trivialement tout autre idéal non nul.

Un double centralisateur pour A est une paire (L, R) de fonctions $L, R : A \to A$ telles que
$$R(x)y = xL(y)$$
pour tous $x, y \in A$. On note $\mathcal{DC}(A)$ l'ensemble des doubles centralisateurs.

4. Montrer que si A est un idéal d'une C^*-algèbre B et $b \in B$, on peut naturellement associer à $b \in B$ un double centralisateur (L_b, R_b).
5. Montrer que si $(L, R) \in \mathcal{DC}(A)$, alors pour tous $x, y \in A$ on a $L(xy) = L(x)y$ et $R(xy) = xR(y)$, et L, R sont linéaires. On pourra utiliser une suite d'unités approchée pour A.
6. Montrer que si $(L, R) \in \mathcal{DC}(A)$, alors L et R sont bornées de même norme. On pourra utiliser la question 2.
7. Pour $T : A \to A$, on note $T^* : x \mapsto (T(x^*))^*$. Montrer que $(L, R) \mapsto (R^*, L^*)$ définit une involution de $\mathcal{DC}(A)$ qui en fait une $*$-algèbre normée. On définira précisément la structure d'algèbre et la norme.
8. Montrer que l'application $x \mapsto (L_x, R_x)$ de $\mathcal{M}(A)$ dans $\mathcal{DC}(A)$ est un $*$-isomorphisme isométrique. En particulier, $\mathcal{M}(A)$ est une C^*-algèbre, et $\mathcal{DC}(A)$ ne dépend pas de la représentation non dégénérée de A choisie au début.

Solution de l'exercice 5.

1. On a une limite faible d'une sous-suite, notons la x Pour tout ξ, la suite $\langle e_n\xi, \xi\rangle$ est croissante bornée, elle a une limite, cette limite doit être $\langle x\xi, \xi\rangle$, d'où la convergence faible ! Mais $\|\sqrt{x - e_n}\xi\|^2 = \langle (x - e_n)\xi, \xi\rangle \to 0$ donc $\sqrt{x - e_n} \to 0$ fortement donc $x - e_n \to 0$ fortement par continuité du produit sur la boule unité ce qui finit la preuve de la convergence forte de e_n vers x. On a ensuite par continuité du produit sur la boule unité que $x^2 = x$ et $x^* = x$ donc x est une projection, qu'on note dorénavant p. On a aussi, toujours par continuité, que $px = xp = x$ pour tout $x \in A$. En particulier pour tout $x \in A$, $x(1 - p) = 0$, ce qui dit précisément que les vecteurs ξ dans $(1 - p)\mathcal{H}$ satisfont $A\xi = 0$. Ainsi $p = 1$.

2. Clair par la première question : $xe_n \to x$ fortement.
3. Comme A est fermée, si $xA \not\subseteq A$ on trouve $a \in A$ tel que $\|xa - A\| > 0$, ce qui reste vrai pour x' proche de x, donc $\mathcal{A}$ est fermée pour la norme. Soit $x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, si $xa \in A$ et $ax \in A$ pour tout a, alors $a^*x* \in A$ et $x^*a^* \in A$ pour tout $a \in A$, donc x^* est aussi un multiplicateur. On conclut que $\mathcal{M}(A)$ est une C^*-algèbre. Si $x \in \mathcal{M}(A)$, $xe_n \in A$ pour tout n et $xe_n \to x$ fortement donc $x \in A''$. Reste à voir que A est un idéal essentiel (il intersecte tout autre idéal non trivial non trivialement). Soit donc I un idéal de $\mathcal{M}(A)$, supposons $A \cap I = \{0\}$. Si $x \in I$, pour tout $y \in A$, on a $xy \in A \cap I = 0$, donc par la question précédente $x = 0$.
4. L_a est bien sûr la multiplication à gauche par a, R_a la multiplication à droite, on a bien $R_a(x)y = xay = xL_a(y)$.
5. Regardons ce qui se passe quand x est une unité approchée :
$$R(xy)e_n = xyL(e_n) = x(yL(e_n)) = xR(y)e_n \to xR(y),$$
tandis que $R(xy)e_n \to R(xy)$. Similaire pour L.
6. De même $R(x + \lambda y)e_n = (x + \lambda y)L(e_n) = R(x)e_n + \lambda R(y)e_n$, en passant à la limite on a la linéarité. Pour montrer que R est borné, il suffit de montrer que son graphe est fermé. Soit $x_n \to x$ avec $R(x_n) \to y$. Alors pour tout $a \in A$,
$$\begin{aligned}\|R(x)a - ya\| &\leqslant \|R(x)a - R(x_n)a\| + \|R(x_n)a - ya\| \\ &\leqslant \|L(a)\| \, \|x - x_n\| + \|a\| \, \|R(x_n) - y\| \to 0\end{aligned}$$
On conclut que $(R(x) - y)a = 0$ pour tout $a \in A$, donc $R(x) = y$ d'après la question 2. Pour montrer que L est borné, c'est tout pareil mais dans l'autre sens.
7. On utilise la norme de L, égale à celle de R.
8. Pour vérifier l'isométrisme, on remarque d'abord que $\|L_x\| \leqslant \|x\|$, puis on montre que $\|xe_n\| \to \|x\|$: en effet $xe_n \to x$ fortement et la norme est semi-continue inférieurement pour la topologie forte (à la main : on écrit que la norme de x est presque réalisée par $\|x\xi\|$ qui est très proche de $\|xe_n\xi\|$). Reste à voir la surjectivité.

   Soit (L, R) un double centralisateur. La suite des $L(e_n)$ et des $R(e_n)$ est bornée, quitte à extraire elles convergent faiblement vers x_L et x_R respectivement. Si $y, z \in A$ on a yx_Rz est par continuité séparée du produit la limite faible des $yR(e_n)z = R(ye_n)z \to yR(z) = L(y)z = yx_Lz$ par le même argument. D'où $x_L = x_R = x$. Et x était donc le seul point d'accumulation possible : les suites convergent faiblement. Maintenant, $L(a)$ est la limite en norme des $L(e_na)$ puisque L est bornée (en particulier leur limite faible), or $L(e_na) = L(e_n)a \to xa$ faiblement donc L coïncide avec la multiplication à gauche par x, et de même $R(a) = \lim_n R(ae_n) = \lim_n aR(e_n) = ax$.