TD 2 - C^*-algèbres de dimension finie

Le but de ce TD est principalement de classifier les C^*-algèbres de dimension finie (ce sont des sommes directes de $M_n(\mathbb{C})$), et les morphismes entre elles (qui seront déterminés à conjugaison unitaire près par une matrice à coefficients entiers). On s'en servira dans le TD suivant pour calculer la K-théorie des algèbres approximativement finies. Il se trouve que le bon cadre pour la plupart des résultats est celui des sous-algèbres de la C^*-algèbre $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ des opérateurs compacts. Les exercices ne sont pas indépendants. Le résultat principal est donné dans l'exercice 3.

Exercice 1. Projections minimales et irréducibilité.
Soit A une sous C^*-algèbre de $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ non triviale.

1. Montrer que A contient une projection minimale.
2. Montrer que pour tout $x \in A$, $pxp \in \mathbb{C}p$.
3. Montrer que si $\xi \in p\mathcal{H}$ est non nul, alors la restriction de A à $\overline{A\xi}$ est irréductible.
4. Montrer que tout $A \subseteq \mathcal{K}(\mathcal{H})$ irréductible est égal à $\mathcal{K}(\mathcal{H})$.

Solution de l'exercice 1.

1. Utiliser le théorème spectral sur un élément non trivial normal.
2. Si pxp est non trivial, une projection spectrale contredira la minimalité.
3. Soit $f : A \to \mathbb{C}$ qui à $a \in A$ associe l'unique $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $pap = \lambda p$. Regarder le commutant dans $\mathcal{B}(\overline{A\xi})$. Si $y \in (A_{\restriction \overline{A\xi}})' \cap \mathcal{B}(\overline{A\xi})$, on calcule
$$\begin{aligned}\langle ya\xi, b\xi\rangle &= \langle yap\xi, bp\xi\rangle \\ &= \langle ypb^*ap\xi, \xi\rangle \\ &= \overline{f(b^*a)}\,\langle y\xi, \xi\rangle \\ &= \langle a\xi, b\xi\rangle \langle y\xi, \xi\rangle\,.\end{aligned}$$
On en déduit que $y_{\restriction \overline{A\xi}} = \langle y\xi, \xi\rangle \,\mathrm{id}_{\overline{A\xi}}$.
4. A contient une projection minimale sur p, on montre que p est de dimension 1. En effet, soit $\xi \in p\mathcal{H}$ de norme 1, soit $\eta \in p\mathcal{H}$ orthogonal à ξ, soit $x \in A$. On a $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $pxp = \lambda x$, alors $\langle \eta, x\xi\rangle = \langle p\eta, xp\xi\rangle = \lambda \langle \xi, \eta\rangle = 0$, donc η est orthogonal à $\overline{A\xi}$. Par irréducibilité, ça implique $\eta = 0$. Donc p est bien de dimension 1, et alors on utilise que $A\xi$ est dense dans $\mathcal{H}$ pour trouver, étant donné η de norme 1 quelconque, une suite a_n dans A avec $a_n\xi \to \eta$, et alors $\langle \xi, \cdot\rangle\, \xi \to \langle \eta, \cdot\rangle\, \eta$ donc A contient toutes les projections de rang 1, donc $A = \mathcal{K}(\mathcal{H})$.

Exercice 2. Idéaux et irréducibilité.
Soit A une C^*-algèbre, soit I un idéal bilatère fermé de A.

1. Montrer que toute représentation $\pi : A \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ telle que $\pi(I) \neq \{0\}$ est irréductible ssi sa restriction à I est irréductible.
2. Montrer que toute représentation $\pi : I \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ non dégénérée s'étend de manière unique en une représentation $\tilde{\pi} : A \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$.
3. En déduire que $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ est simple (il n'a pas d'idéal bilatère fermé non trivial).

Solution de l'exercice 2.

1. Si π n'est pas irréductible, il est clair que sa restriction à I ne l'est pas non plus. Réciproquement, si la restriction à I n'est pas irréductible, on a ξ tel que $\overline{\pi(I)\xi}$ est un sous-espace invariant fermé propre, mais alors pour tout $a \in A$ et $x \in I$, $\pi(a)\pi(x)\xi = \pi(ax)\xi$, et donc $\pi(I)\xi$ est un sous-espace $\pi(A)$-invariant, donc son adhérence également, donc π n'est pas irréductible.
2. Considérons un vecteur $\xi = \sum_{i=1}^n \pi(x_i)\xi_i$ where $x_i \in I$ and $\xi_i \in \mathcal{H}$. Prenons $a \in A$, alors on veut définir $\tilde{\pi}(a)\xi = \sum_{i=1}^n \pi(ax_i)\xi_i$, mais encore faut-il que ça ne dépende pas de l'écriture de ξ comme somme de $\pi(x_i)\xi_i$. Pour cela, on s'aide d'une approximation de l'unité dans I, notée (e_k) :
$$\sum_{i=1}^n \pi(ax_i)\xi_i = \lim_k \sum_{i=1}^n \pi(ae_kx_i)\xi_i = \pi(ae_k)\sum_{i=1}^n \pi(x_i)\xi_i,$$
et donc
$$\left\|\sum_{i=1}^n \pi(ax_i)\xi_i\right\| \leqslant \limsup_k \|\pi(ae_k)\| \left\|\sum_{i=1}^n \pi(x_i)\xi_i\right\|$$
Or $\limsup_k \|\pi(ae_k)\| = \|a\|$ car (e_k) est une approximation de l'identité. On en déduit que $\tilde{\pi}$ est bien définie et bornée sur l'espace vectoriel engendré par $\pi(I)\mathcal{H}$, donc s'étend à $\overline{\pi(I)\mathcal{H}} = \mathcal{H}$, la dernière égalité venant du fait que π est non dégénérée.
3. Tout d'abord, $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ est irréductible, par exemple car pour tout ξ, η de norme 1, $\langle \xi, \cdot \rangle \eta$ est compact et envoie ξ sur η. Soit I idéal bilatère fermé de $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ non trivial, alors la restriction de la représentation identité à I est irréductible par la question 1, donc $I = \mathcal{K}(\mathcal{H})$ d'après la question 4 de l'exercice 1.

Exercice 3. Représentations des sous-algèbres de $\mathcal{K}(\mathcal{H})$.
Soit A une sous C^*-algèbre de $\mathcal{K}(\mathcal{H})$, soit $\pi : A \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_\pi)$ une représentation. Soit $p \in A$ une projection minimale telle que $\pi(p) \neq 0$, $\xi \in p\mathcal{H}$, $\eta \in \pi(p)\mathcal{H}_\pi$ avec $\|\xi\| = \|\eta\| = 1$.

1. Montrer que les états associés à ξ et η sont égaux.
2. En déduire que si $\pi : A \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ est une représentation non dégénérée, alors c'est une somme directe d'irréductibles qui sont des sous-représentations de $\mathrm{id}_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}$.
3. En déduire que toute C^*-algèbre de dimension finie est une somme directe finie de $M_{n_k}(\mathbb{C})$.
4. Classifier les morphismes entre C^*-algèbres de dimension finie à conjugaison par un unitaire près.

Solution de l'exercice 3.

1. Soit encore $f : A \to \mathbb{C}$ telle que pour tout $a \in A$, $pap = f(a)p$. D'une part,
$$\begin{aligned}\langle \pi(a)\eta, \eta \rangle &= \langle \pi(ap)\eta, \pi(p)\eta \rangle \\ &= \langle \pi(pap)\eta, \eta \rangle \\ &= f(a)\,\langle \pi(p)\eta, \eta \rangle \\ &= f(a)\end{aligned}$$
d'autre part,
$$\langle a\xi, \xi \rangle = \langle ap\xi, p\xi \rangle = \langle pap\xi, \xi \rangle = f(a) = \langle \pi(a)\eta, \eta \rangle .$$

Les deux représentations cycliques associées à ξ et η sont donc unitairement équivalentes. D'après la question 3, celle associée à ξ est irréductible, donc celle associée à η également.

2. Utiliser le lemme de Zorn.