Contrôle 1

Durée : 1h15
Toutes les réponses devront être soigneusement justifiées. La qualité de la rédaction sera prise en compte dans le barême.

Exercice 1. Convergence uniforme.
On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ données par : pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x > 0$,

$$f_n(x) = \ln\left(\frac{(n+1)x}{n+2}\right).$$

1. Montrer que la suite (f_n) converge simplement vers une fonction f que l'on précisera.
2. La suite (f_n) converge-t-elle uniformément vers f sur $]0, +\infty[$?

Solution de l'exercice 1.

1. On a que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{n+1}{n+2} = 1 - \frac{1}{n+2}$ d'où $\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n+2} = 1$ (on peut également le voir directement en utilisant les équivalents, car le numérateur et le dénominateur ont pour équivalent n quand $n \to +\infty$, donc le quotient a pour équivalent 1, donc tend vers 1...) Ainsi, pour tout $x > 0$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)x}{2n+1} = x$. Par continuité de la fonction logarithme, on en déduit que pour tout $x > 0$, on a $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \ln(x)$, ainsi si on pose $f = \ln$ alors (f_n) converge simplement vers f sur $]0, +\infty[$.
2. Soit $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, alors
$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\ln(\frac{(n+1)x}{n+2}) - \ln(x)\right| = \left|\ln(\frac{n+1}{n+2})\right|.$$
Posons $u_n = \left|\ln(\frac{n+1}{n+2})\right|$, alors on a $\lim_{n\to+\infty} u_n = |\ln(1)| = 0$ par continuité de ln, et donc d'après le cours (f_n) converge uniformément vers f.

Exercice 2. Rayon de convergence.
Donner le rayon de convergence des séries entières suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} 2^n n^2 z^n$
2. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \sin\left(\frac{1}{(n+1)^3}\right) z^n.$
3. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \left(1 + \frac{1}{3n}\right)^{2n} z^n.$
4. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \left(1 + \frac{1}{3n}\right)^{2n^2} z^n.$

Solution de l'exercice 2.

1. Soit $a_n = 2^n n^2$ la suite des coefficients de la série entière. Soit $n \geqslant 1$ (important pour que a_n soit non nul !). On a
$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 2\frac{(n+1)^2}{n^2} = 2\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}{\rightarrow} 2[n \to +\infty].$$
Ainsi d'après le critère de d'Alembert le rayon de convergence est égal à $\frac{1}{2}$.

2. On a $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(n+1)^3} = 0$, et donc on a donc $\sin(\frac{1}{(n+1)^3}) \sim \frac{1}{(n+1)^3}$. Ainsi $\frac{|a_{n+1}||a_n|}{\sim} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^3 \to 1[n \to +\infty]$, donc par le critère de d'Alembert le rayon de convergence vaut $\frac{1}{1} = 1$.
3. On applique maintenant le critère de Cauchy :
$$\sqrt[n]{\left|\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{2n}\right|} = \left(1+\frac{1}{3n}\right)^{2n/n} = \left(1+\frac{1}{3n}\right) \to 1[n \to +\infty]$$
donc d'après le critère de Cauchy le rayon de convergence vaut 1.
4. On applique encore le critère de Cauchy : pour $n \geqslant 1$ on a
$$\begin{aligned}\sqrt[n]{\left|\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{2n^2}\right|} &= \left(1+\frac{1}{3n}\right)^{2n} \\ &= e^{2n\ln\left(1+\frac{1}{3n}\right)} \\ &= e^{2n(\frac{1}{3n}+o(\frac{1}{3n}))}[n \to +\infty] \\ &= e^{2/3+o(1)}[n \to +\infty] \\ &\to e^{2/3}[n \to +\infty]\end{aligned}$$
par continuité de l'exponentielle, d'où le rayon de convergence égal à $\frac{1}{e^{2/3}} = e^{-2/3}$.

Exercice 3. Un calcul de somme. Soit $x \in]-1,1[$. Calculer la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(n-1)x^n$ dont on aura auparavant justifié la convergence.

Solution de l'exercice 3. Tout d'abord, la série entière $\sum_{n\geqslant 0}(n-1)z^n$ a pour rayon de convergence 1 d'après le critère de d'Alembert, puisque $\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n-1} = 1$. En particulier la série $\sum_{n\geqslant 0}(n-1)z^n$ convergence dès lors que $|z| < 1$, en particulier la série $\sum_{n\geqslant 0}(n-1)x^n$ converge pour tout $x \in]-1,1[$. Ensuite, les séries entières $\sum_{n\geqslant 0}(n+1)z^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} z^n$ étant également de rayon de convergence 1, (la première étant la série dérivée de la seconde),
$$\sum_{n=0}^{+\infty}(n-1)x^n = \sum_{n\geqslant 0}(n+1)x^n - 2\sum_{n\geqslant 0}x^n,$$
et comme $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ on a par dérivation terme à terme
$$\sum_{n=0}(n-1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{2}{1-x} = \frac{1-2(1-x)}{(1-x)} = \frac{2x-1}{(1-x)^2}.$$

Exercice 4. Une équation différentielle.
On considère l'équation différentielle suivante : $f'(x) = f(2x)$. On suppose que f est solution de l'équation et développable en série entière en zéro : on a $r > 0$ et une série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ de rayon de convergence $R \geqslant r$ telle que pour tout $x \in]-r, r[$ on ait
$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

1. Donner une relation de récurrence reliant a_{n+1} à a_n.
2. En déduire que si $a_0 \neq 0$ alors $R = 0$.
3. Conclure que toute solution de l'équation différentielle $f'(x) = f(2x)$ développable en série entière en zéro doit être nulle au voisinage de zéro.

Solution de l'exercice 4.

1. En dérivant terme à terme, on a pour tout $x \in]-r, r[$ que $f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$. Par ailleurs pour tout $x \in]-\frac{r}{2}, \frac{r}{2}[$, on a $x \in]-r, r[$ et on peut donc écrire $f(2x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(2x)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^n a_n x^n$. D'où pour tout $x \in]-\frac{r}{2}, \frac{r}{2}[$:
$$\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^n a_n x^n.$$
Par unicité des coefficients du développement en série entière en 0, on conclut que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $(n+1)a_{n+1} = 2^n a_n$.
2. Si $a_0 \neq 0$, montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $a_n \neq 0$: c'est clairement le cas pour $n = 0$ par hypothèse, et si $a_n \neq 0$, la formule précédente nous donne $a_{n+1} = \frac{2^n}{n+1}a_n$ donc $a_{n+1} \neq 0$, d'où le résultat par récurrence. Mais alors, on a toujours d'après la formule précédente $\frac{|a_n+1|}{|a_n|} = \frac{2^n}{n+1} \to +\infty [n \to +\infty]$ par croissances comparées, et donc par le critère de d'Alembert le rayon de convergence est nul.
3. D'après la question précédente, si $a_0 \neq 0$ alors $R = 0$, ce qui est contradictoire. On doit donc avoir $a_0 = 0$, ce qui d'après la relation de la question 1 donne par une récurrence similaire à celle de la question 2 que $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi $f(x) = 0$ pour tout $x \in]-r, r[$, et f est donc bien nulle au voisinage de zéro.