Contrôle 1

Durée : 1h15
Toutes les réponses devront être soigneusement justifiées. La qualité de la rédaction sera prise en compte dans le barême.

Exercice 1. Convergence uniforme.
On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ données par : pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x > 0$,

$$f_n(x) = \ln\left(\frac{(n+1)x}{n+2}\right).$$

1. Montrer que la suite (f_n) converge simplement vers une fonction f que l'on précisera.
2. La suite (f_n) converge-t-elle uniformément vers f sur $]0, +\infty[$?

Exercice 2. Rayon de convergence.
Donner le rayon de convergence des séries entières suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} 2^n n^2 z^n$
2. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \sin\left(\frac{1}{(n+1)^3}\right) z^n.$
3. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \left(1+\frac{1}{3n}\right)^{2n} z^n.$
4. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \left(1+\frac{1}{3n}\right)^{2n^2} z^n.$

Exercice 3. Un calcul de somme. Soit $x \in]-1, 1[$. Calculer la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(n-1)x^n$ dont on aura auparavant justifié la convergence.

Exercice 4. Une équation différentielle.
On considère l'équation différentielle suivante : $f'(x) = f(2x)$. On suppose que f est solution de l'équation et développable en série entière en zéro : on a $r > 0$ et une série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ de rayon de convergence $R \geqslant r$ telle que pour tout $x \in]-r, r[$ on ait

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

1. Donner une relation de récurrence reliant a_{n+1} à a_n.
2. En déduire que si $a_0 \neq 0$ alors $R = 0$.
3. Conclure que toute solution de l'équation différentielle $f'(x) = f(2x)$ développable en série entière en zéro doit être nulle au voisinage de zéro.