Contrôle 2

Durée : 1h30.
Toutes les réponses devront être soigneusement justifiées. La qualité de la rédaction sera prise en compte dans le barême.

Exercice 1. Convergence simple.
On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ données par : pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout réel $x \geqslant 0$,

$$f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

1. Montrer que la suite (f_n) converge simplement vers une fonction f que l'on déterminera.
2. La suite (f_n) converge-t-elle uniformément vers f sur $[0, +\infty[$?

Solution de l'exercice 1.

1. Soit $x \geqslant 0$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a
$$f_n(x) = e^{n\ln(1+\frac{x}{n})}.$$
Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x}{n} = 0$ et $\ln(1+X) \underset{X\to 0}{\sim} X$ donc $\ln(1+\frac{x}{n}) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{x}{n}$, et donc par produit
$$n\ln(1+\frac{x}{n}) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\frac{x}{n} = x.$$
En particulier $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln(1+\frac{x}{n}) = x$, et donc par continuité de l'exponentielle on a
$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} e^{n\ln(1+\frac{x}{n})} = e^x.$$
Ainsi, la suite (f_n) converge simplement vers la fonction $f = \exp$.
2. Considérons la suite $x_n = n$, alors $f_n(x_n) = 2^n$, donc $f(x_n) - f_n(x_n) = e^n - 2^n$ qui tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$. En particulier la suite $(f(x_n) - f_n(x_n))_n$ ne tend pas vers zéro, et donc (f_n) ne converge pas uniformément vers f.

Exercice 2. Série génératrice et espérance.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \frac{n^2+n+1}{n!}$.

1. Donner le rayon de convergence R de la série entière
$$\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n.$$
2. On note $f(z)$ la somme de la série entière ci-dessus. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $f(z) = (z+1)^2 e^z$.
3. Trouver l'unique réel $\lambda > 0$ tel que $\frac{f}{\lambda}$ soit la série génératrice d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.
4. On fixe $\lambda > 0$ tel que $\frac{f}{\lambda}$ soit la série génératrice d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$. Donner alors l'espérance de X.

Solution de l'exercice 2.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a alors
$$\frac{|a_{n+1}|}{|a|_n} = \frac{n^2+3n+3}{n^2+n+1}\frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^2}{n^2}\frac{1}{n} = \frac{1}{n}.$$

Ainsi $\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a|_n} = 0$, et donc d'après le critère de d'Alembert le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ vaut $R = +\infty$.

2. Soit $z \in \mathbb{C}$, on a

$$\begin{aligned}
f(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2+n+1}{n!} z^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n-1)+2n+1}{n!} z^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{n!} z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n}{n!} z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} z^n \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{n!} z^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n}{n!} z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} z^n,
\end{aligned}$$

la dernière égalité découlant de la nullité des premiers termes des sommes correspondantes. On peut alors simplier les fractions, puis faire un changement d'indice, obtenant

$$\begin{aligned}
f(z) &= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-2)!} z^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{(n-1)!} z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} z^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} z^{n+2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{n!} z^{n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} z^n \\
&= (z^2+2z+1)e^z \\
f(z) &= (z+1)^2 e^z.
\end{aligned}$$

3. Si X est une variable aléatoire à valeur dans $\mathbb{N}$, sa série génératrice f_X doit satisfaire $f_X(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n) = 1$, donc si $f_X = \frac{f}{\lambda}$ on a en évaluant en 1 que $\lambda = f(1) = 4e$.
4. Ici la série génératrice de somme f_X a rayon de convergence $+\infty > 1$ d'après la première question, donc d'après le cours $\mathbb{E}(X) = f_X'(1) = \frac{f'(1)}{\lambda}$. Or pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a d'après la question 2 $f'(t) = (2(t+1)+(t+1)^2)e^t$, ainsi $\mathbb{E}(X) = \frac{8e}{\lambda} = 2$.

Exercice 3. Équation différentielle et développement en série entière.
On considère l'équation différentielle suivante :

$$(1) \qquad \begin{cases} xy'' + y' + y &= 0 \\ y(0) &= 1. \end{cases}$$

On suppose que f est solution de (1) est développable en série entière en 0 : on a $r > 0$ et une série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ de rayon de convergence $R \geqslant r$ tel que pour tout $x \in]-r, r[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a_{n+1} = -\frac{a_n}{(n+1)^2}$.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a_n = \frac{(-1)^n}{(n!)^2}$.
3. Montrer que si réciproquement on pose, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} x^n$, alors f est une fonction bien définie sur $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ solution de (1).

Solution de l'exercice 3.

1. En dérivant terme à terme, on a pour tout $x \in]-r, r[$ que $f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$, puis $f''(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n$. D'où pour tout $x \in]-r, r[$:
$$x\sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n + \sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n = 0.$$
Or on a
$$\begin{aligned} x\sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n &= \sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^{n+1} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)na_{n+1}x^n. \end{aligned}$$
et comme pour $n = 0$ on a $(n+1)na_{n+1}x^n = 0$, on peut ajouter ce terme à la somme de droite précédente pour la réécrire
$$x\sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)na_{n+1}x^n.$$
On conclut alors en regroupant les termes de la première équation que
$$\sum_{n=0}^{+\infty}((n+1)na_{n+1} + (n+1)a_{n+1})x^n = -\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n.$$
Par unicité des coefficients du développement en série entière en 0, on conclut que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $((n+1)na_{n+1} + (n+1)a_{n+1}) = -a_n$, ce qui se réécrit $(n+1)^2a_{n+1} = -a_n$, ou encore $a_{n+1} = -\frac{a_n}{(n+1)^2}$.
2. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $a_n = \frac{(-1)^n}{(n!)^2}$: pour $n = 0$ on a bien $a_0 = f(0) = 1$, puis si $a_n = \frac{(-1)^n}{(n!)^2}$ alors
$$a_{n+1} = -\frac{1}{(n+1)^2}\frac{(-1)^n}{(n!)^2} = \frac{(-1)^{n+1}}{((n+1)n!)^2} = \frac{(-1)^{n+1}}{((n+1)!)^2},$$
ce qui conclut la preuve par récurrence.
3. D'après la question précédente, si $a_0 \neq 0$ alors $R = 0$, ce qui est contradictoire. On doit donc avoir $a_0 = 0$, ce qui d'après la relation de la question 1 donne par une récurrence similaire à celle de la question 2 que $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi $f(x) = 0$ pour tout $x \in]-r, r[$, et f est donc bien nulle au voisinage de zéro.
4. Il faut tout d'abord vérifier que f est bien définie, c'est-à-dire calculer le rayon de convergence. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$ que
$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{(n!)^2}{((n+1)!)^2} = \frac{1}{(n+1)^2},$$
donc $\lim_{n\to+\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 0$ et le rayon de convergence vaut donc $+\infty$: d'après le cours, f est bien définie sur $\mathbb{R}$, et de classe $\mathcal{C}^\infty$. Les coefficients a_n de son développement en série entière satisfont la condition $a_{n+1} = -\frac{a_n}{(n+1)^2}$ donc en remontant les calculs de la question 1 et comme $f(0) = a_0 = 1$ on a bien que f est solution de l'équation différentielle.

Exercice 4. Plus on est de gagnantes plus on gagne.
On considère un loto où chaque personne qui joue a une chance sur 1 million de gagner, indépendamment des autres, et on considère que le nombre de personnes qui jouent suit une loi de Poisson de paramètre 1 million. Si n personnes ont le numéro gagnant, alors chacune gagne $(n-1)$ millions d'euros. En particulier si une seule personne a le numéro gagnant, alors elle ne gagne pas d'argent.

1. Montrer que la loi du nombre de personnes gagnantes est une loi de Poisson de paramètre 1.

2. Calculer l'espérance de la quantité totale d'argent que devra dépenser la loterie pour récompenser les personnes gagnantes.

Solution de l'exercice 4.

1. Notons N le nombre de personnes jouant, qui suit une loi de Poisson de paramètre 10^6. Soit $(X_i)_{i\geqslant 1}$ une suite de Bernoulli indépendantes de paramètre 10^{-6}, indépendantes également de N. Le nombre W de personnes gagnant peut alors se modéliser comme la somme aléatoire
$$W = \sum_{i=1}^{N} X_i.$$
D'après le cours, la fonction caractéristique de W s'exprime comme $f_W = f_N \circ f_X$ où X suit la même loi que les X_i. Or $f_N(z) = e^{10^6(z-1)}$ car $N \sim \mathcal{P}(10^6)$, tandis que $f_X(z) = (1-10^{-6})+10^{-6}z$ ainsi
$$f_W(z) = e^{10^6((1-10^{-6})+10^{-6}z-1)} = e^{10^6(-10^{-6}+10^{-6}z)} = e^{z-1}.$$
On reconnait la fonction caractéristique d'une loi de Poisson de paramètre 1, donc $W \sim \mathcal{P}(1)$. C'est en fait un résultat qu'on a vu comme exemple en cours.
2. Par définition la quantité totale d'argent à dépenser (en millions d'euros) est la variable aléatoire $N(N-1)$. Par le théorème de transfert on a
$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(N(N-1)) &= \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)\mathbb{P}(N=n) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{en!} \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{e(n-2)!} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{en!} \\
\mathbb{E}(N(N-1)) &= \frac{e}{e} = 1.
\end{aligned}$$
Ainsi l'espérance de la quantité totale d'argent à dépenser est de 1 million d'euros.