Contrôle 2

Durée : 1h30.
Toutes les réponses devront être soigneusement justifiées. La qualité de la rédaction sera prise en compte dans le barême.

Exercice 1. Convergence simple.
On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ données par : pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout réel $x \geqslant 0$,

$$f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

1. Montrer que la suite (f_n) converge simplement vers une fonction f que l'on déterminera.
2. La suite (f_n) converge-t-elle uniformément vers f sur $[0, +\infty[$?

Exercice 2. Série génératrice et espérance.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \frac{n^2+n+1}{n!}$.

1. Donner le rayon de convergence R de la série entière
$$\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n.$$
2. On note $f(z)$ la somme de la série entière ci-dessus. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $f(z) = (z+1)^2 e^z$.
3. Trouver l'unique réel $\lambda > 0$ tel que $\frac{f}{\lambda}$ soit la série génératrice d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.
4. On fixe $\lambda > 0$ tel que $\frac{f}{\lambda}$ soit la série génératrice d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$. Donner alors l'espérance de X.

Exercice 3. Équation différentielle et développement en série entière.
On considère l'équation différentielle suivante :

$$(1) \qquad \begin{cases} xy'' + y' + y &= 0 \\ y(0) &= 1. \end{cases}$$

On suppose que f est solution de (1) est développable en série entière en 0 : on a $r > 0$ et une série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ de rayon de convergence $R \geqslant r$ tel que pour tout $x \in]-r, r[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a_{n+1} = -\frac{a_n}{(n+1)^2}$.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a_n = \frac{(-1)^n}{(n!)^2}$.
3. Montrer que si réciproquement on pose, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} x^n$, alors f est une fonction bien définie sur $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ solution de (1).

Exercice 4. Plus on est de gagnantes plus on gagne.
On considère un loto où chaque personne qui joue a une chance sur 1 million de gagner, indépendamment des autres, et on considère que le nombre de personnes qui jouent suit une loi de Poisson de paramètre 1 million. Si n personnes ont le numéro gagnant, alors chacune gagne $(n-1)$ millions d'euros. En particulier si une seule personne a le numéro gagnant, alors elle ne gagne pas d'argent.

1. Montrer que la loi du nombre de personnes gagnantes est une loi de Poisson de paramètre 1.
2. Calculer l'espérance de la quantité totale d'argent que devra dépenser la loterie pour récompenser les personnes gagnantes.