Compléments sur la convergence uniforme : sommes et produits

François Le Maître

12 septembre 2024

Voici un énoncé qu'on a vu mais pas prouvé, qui peut se résumer en : la somme de deux limites uniformes est la limite uniforme des sommes.

Proposition 1. *Soit $I \subseteq \mathbb{R}$, et pour $n \in \mathbb{N}$ soient $f_n : I \to \mathbb{R}$ et $g_n : I \to \mathbb{R}$. Supposons que $f_n \xrightarrow{u} f$ et $g_n \xrightarrow{u} g$. Alors $f_n + g_n \xrightarrow{u} f + g$.*

Démonstration. Il va s'agir d'estimer la valeur absolue de la différence suivante, où $x \in I$ et $n \in \mathbb{N}$: $f_n(x)+g_n(x)-(f(x)+g(x)) = (f_n(x)-f(x))+(g_n(x)-g(x))$. On applique l'inégalité triangulaire : pour tout $x \in I$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$|f_n(x) + g_n(x) - (f(x) + g(x))| \leq |f_n(x) - f(x)| + |g_n(x) - g(x)| . \tag{1}$$

Soit maintenant $\epsilon > 0$. On peut espérer montrer que le terme de gauche est petit que ϵ en montrant que les deux termes de droite sont chacun plus petits que $\epsilon/2$.

Comme $f_n \xrightarrow{u} f$, on fixe un rang $N_1 \in \mathbb{N}$ "à partir duquel le premier terme de droite est plus petit que $\epsilon/2$", c'est-à-dire tel que $\forall n \geq N_1$ et $\forall x \in I$, on a

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

De même comme $g_n \xrightarrow{u} g$, on a $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N_2$ et $\forall x \in I$, on a

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Posons alors $N = \max(N_1, N_2)$ (il s'agit d'un rang à partir duquel les deux inégalités recherchées sont vérifiées).

Soit $n \geq N$, et soit $x \in I$, on a d'une part que $n \geq N_1$ donc $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2}$ et d'autre part que $n \geq N_2$ donc $|g_n(x) - g(x)| < \frac{\epsilon}{2}$. En combinant ceci avec l'équation (1), on trouve bien

$$|f_n(x) + g_n(x) - (f(x) + g(x))| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Ceci montre que $\forall n \geq N, \forall x \in I \ |f_n(x) + g_n(x) - (f(x) + g(x))| < \epsilon$. On a donc bien montré que pour chaque $\epsilon > 0$, on peut trouver un rang N tel que à partir de ce rang (c'est-à-dire pour tout $n \geq N$), on a que pour tout $x \in I$,

$$|(f_n(x) + g_n(x)) - (f(x) + g(x))| < \epsilon.$$

Ainsi, $f_n + g_n \xrightarrow{u} f + g$ comme voulu. $\square$

On va maintenant regarder ce qui se passe pour le produit. On l'a vu en cours, les choses peuvent mal se passer, et on rappellera un contre-exemple plus tard. Commençons par rappeler un énoncé fondamental pour la suite, que j'ai caché sous le tapis en cours.

Théorème 2. *Soit $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue. Alors f est bornée : il existe $M > 0$ tel que pour tout $x \in [a, b]$, on a*

$$|f(x)| \leq M.$$

On utilise également de manière cruciale le fait, vu en cours, que toute limite uniforme de fonctions continues est continue, c'est-à-dire :

Théorème 3. *Soit $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle et une suite de fonctions $f_n : I \to \mathbb{R}$ continues convergeant uniformément vers $f : I \to \mathbb{R}$. Alors f est également continue.*

On peut maintenant prouver l'énoncé sur le comportement de la convergence uniforme par rapport au produit vu en cours : *pour des fonctions continues sur un intervalle fermé*, le produit de deux limites uniformes est la limite uniforme du produit.

Théorème 4. *Soit $a < b$, soient (f_n) et (g_n) deux suites de fonctions sur $[a, b]$ à valeurs réelles. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, les fonctions f_n et g_n sont continues, et que l'on a $f_n \xrightarrow{u} f$ et $g_n \xrightarrow{u} g$. Alors $f_n g_n \xrightarrow{u} fg$.*

Démonstration. Essayons comme précédemment de borner $f_n(x)g_n(x) - f(x)g(x)$, cette fois-ci en passant par un terme intermédiaire, un peu comme on l'a fait pour voir qu'une limite uniforme de fonctions continues est continue : on a

$$\begin{aligned} |f_n(x)g_n(x) - f(x)g(x)| &\leq |f_n(x)g_n(x) - f_n(x)g(x)| + |f_n(x)g(x) - f(x)g(x)| \\ &= |f_n(x)|\,|g_n(x) - g(x)| + |f_n(x) - f(x)|\,|g(x)|\,. \end{aligned}$$

Essayons d'analyser les différents termes : par hypothèse, pour n assez grand, on a que pour tout x les termes $|g_n(x) - g(x)|$ ainsi que $|f_n(x) - f(x)|$ sont très petits. Malheureusement, on les a multipliés par des termes additionels : $|f_n(x)|$ pour le premier, $|g(x)|$ pour le second.

Commençons par essayer de borner le second produit $|f_n(x) - f(x)|\,|g(x)|$. On remarque tout d'abord que g est continue comme limite uniforme de fonctions continues (théorème 3). Le théorème 2 nous fournit alors $M > 0$ tel que pour tout $x \in [a, b]$, $|g(x)| \leq M$. On peut maintenant borner le second produit : comme $f_n \xrightarrow{u} f$ et $\frac{\epsilon}{2M} > 0$, on a $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_1$ et tout $x \in [a, b]$, on a $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2M}$, ce qui donne donc

$$|f_n(x) - f(x)|\,|g(x)| < \frac{\epsilon}{2M} \cdot M = \frac{\epsilon}{2}. \tag{2}$$

Pour borner le premier produit, $|f_n(x)|\,|g_n(x) - g(x)|$ c'est plus compliqué car les deux termes dépendent de n. Si on veut s'en sortir comme pour le second produit, il faut montrer que le terme $|f_n(x)|$ est borné. Écrivons donc

$$|f_n(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x)|\,. \tag{3}$$

Comme f est continue d'après le théorème 3, on a $M > 0$ tel que pour tout $x \in [a, b]$ on aie $|f(x)| \leq M$. D'autre part, appliquant la définition de la convergence uniforme de f_n vers f, on trouve $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_2$ et tout $x \in [a, b]$, on a $|f_n(x) - f(x)| < 1$ (et donc $|f_n(x)| \leq M + 1$ d'après (3)).

On peut maintenant conclure comme pour le second terme : par convergence uniforme de (g_n) vers g, comme $\frac{\epsilon}{2(M+1)} > 0$, on a $N_3 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_3$,

$$|g_n(x) - g(x)| < \frac{\epsilon}{2(M+1)}.$$

Soit enfin $N = \max(N_1, N_2, N_3)$, alors pour tout $n \geq N$ et tout $x \in [a, b]$, on a à la fois $n \geq N_1$, $n \geq N_2$ et $n \geq N_3$ donc on peut reprendre l'inégalité du début et écrire :

$$\begin{aligned} |f_n(x)g_n(x) - f(x)g(x)| &\leq |f_n(x)g_n(x) - f_n(x)g(x)| + |f_n(x)g(x) - f(x)g(x)| \\ &= |f_n(x)|\,|g_n(x) - g(x)| + |f_n(x) - f(x)|\,|g(x)| \\ &< (M+1) \cdot \frac{\epsilon}{2(M+1)} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon, \end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer. □

On rappelle enfin le non-exemple suivant, qui montre qu'il est important de travailler sur un intervalle fermé : si on prend $f_n(x) = g_n(x) = x + \frac{1}{n}$ alors $f_n \xrightarrow{u} f$ et $g_n \xrightarrow{u} g = f$ où $f(x) = g(x) = x$, mais la fonction $f_n g_n$ est donnée par $f_n g_n(x) = (x + \frac{1}{n})^2$, dont on a vu qu'elle ne tendait pas uniformément vers $fg : x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}$. Mais d'après le théorème précédent $f_n g_n \xrightarrow{u} fg$ sur tout intervalle de la forme $[a, b]$.