TD 1 – Convergence simple, convergence uniforme

Exercice 1. Plein d'exemples.
Étudier la convergence simple et uniforme des suites de fonctions définies par :

1. $f_n(x) = \frac{x}{1+nx}$ sur $[0,1]$;
2. $f_n(x) = \frac{1}{1+nx}$ sur $[0,1]$;
3. $f_n(x) = \frac{\ln(1+nx)}{1+nx}$ sur $\mathbb{R}^+$;
4. $f_n(x) = e^{-nx}$ sur $[0,+\infty[$;
5. $f_n(x) = nx^2e^{-nx}$ sur $[0,+\infty[$;
6. $f_n(x) = (1-x)x^n$ sur $[0,1]$.

Exercice 2. Préservation de propriétés.
Soit (f_n) une suite de fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui converge simplement vers une fonction f sur $\mathbb{R}$. Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses :

1. Si les f_n sont croissantes, alors f aussi.
2. Si les f_n sont strictement croissantes, alors f aussi.
3. Si les f_n sont périodiques, de même période, alors f l'est aussi, de même période.
4. Si les f_n sont continues en $a \in \mathbb{R}$, alors f aussi.

Reprendre l'exercice en remplaçant la convergence simple par la convergence uniforme.

Exercice 3. Plus d'exemples.
Étudier la convergence simple et uniforme des suites de fonctions (f_n) suivantes :

1. $f_n(x) = 1 + x + \cdots + x^{n-1}$ sur $]-1,1[$, puis sur $[-a,a]$ avec $0 \leqslant a < 1$.
2. $f_n(x) = nx^n \ln(x)$, $f_n(0) = 0$, sur $[0,1]$.
3. $f_n(x) = e^{-nx}\sin(2nx)$ sur $\mathbb{R}^+$ puis sur $[a,+\infty[$, avec $a > 0$.

Exercice 4. Convergence et intégrales.
Soit $(f_n)_{n\geqslant 1}$ la suite de fonctions définies sur $[0,1]$ par : pour tout $x \in [0,1]$ $f_n(x) = \dfrac{2^n x}{1+2^n n x^2}$.

1. Étudier la convergence simple de cette suite de fonctions.
2. Calculer $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(t)dt$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$. En déduire que la suite (f_n) n'est pas uniformément convergente sur $[0,1]$.
3. Donner une démonstration directe du fait que la suite (f_n) ne converge pas uniformément sur $[0,1]$.

Exercice 5. Une intégrale à couper en deux.
Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)dt$. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$.

Exercice 6. Un exemple plus difficile.
Soit pour $n \in \mathbb{N}$ la fonction $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = e^{\frac{(n-1)x}{n}}$.

1. Étudier la convergence simple de (f_n).
2. Montrer que la convergence est uniforme sur tout intervalle $]-\infty,b]$ où $b \in \mathbb{R}$.
3. La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$?