TD 2 – Séries entières

Exercice 1. Calculs de rayon de convergence.
Calculer le rayon de convergence des séries entières de la forme $\sum a_n z^n$ lorsque la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donnée par :

1. $a_n = \frac{1}{n^\alpha}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$;
2. $a_n = n^{\sqrt{n}}$;
3. $a_n = (\sqrt{n})^n$;
4. $a_n = (2i)^p$ si $n = 2p$ est pair et 0 sinon ;
5. $a_n = \frac{e^{in}}{n\pi^n}$;
6. $a_n = \frac{P(n)}{Q(n)}$ avec P et Q des polynômes non nuls ;
7. $a_n = \frac{\ln n}{2^{3n-2}}$.

Exercice 2. Développements en série entière.
Donner le développement en série entière des expressions suivantes

1. e^{x^2-2x} en 1 ;
2. $\arctan\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$ en 0 ;
3. $\frac{1}{(x-1)(x-2)}$ en 0 ;
4. $\ln(x+a)$ en 0 où $a > 0$;
5. $e^x \cos x$ en 0 ;
6. $\cos^3(x)$ en 0 ;
7. $\int_0^x \frac{\arctan(t^2)}{t} dt$ en 0 ;
8. $\frac{1+x}{(1-x)^3}$ en 0.

Exercice 3. Calculs de sommes.
Calculer le rayon de convergence et la somme des séries entières suivantes :

1. $\sum n^2 z^n$;
2. $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(n+2)^2}{(n+2)!} z^n$;
3. $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{2n-1} z^{2n}$;
4. $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{2n} z^{2n}$;
5. $\sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{1+2+\cdots+n}$;
6. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{\sin(n\alpha)}{n!} z^n$.

Exercice 4. Coefficient mystère.
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle convergeant vers $a \in \mathbb{R}$

1. Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$ est égal à $+\infty$.
2. Pour $z \in \mathbb{C}$, on note $f(z)$ la somme de la série $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} f(x)$.

Exercice 5. Une fonction pas développable en série entière mais de classe $\mathcal{C}^\infty$.
Montrer que la fonction définie par $f(t) = 0$ si $t \leqslant 0$ et $f(t) = e^{-\frac{1}{t}}$ si $t > 0$ est de classe C^∞ mais pas développable en série entière en 0.

Exercice 6. Une équation différentielle classique.
Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}$ existe-t-il une fonction f non nulle développable en série entière au point 0, telle que $f'(x) = f(ax)$? Préciser le rayon de convergence de la série entière obtenue.

Exercice 7. Une équation différentielle plus compliquée.
On considère l'équation différentielle

$$(1+x^2)y'' - 2y = 0. \qquad (1)$$

1. Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Montrer que f est solution de (1) si et seulement on si on a
$$a_{n+2} = -\frac{n-2}{n+2} a_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$
2. Montrer qu'il existe une unique fonction f solution de (1) telle que
   — f est développable en série entière au voisinage de 0,
   — $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$.

   Calculer les coefficients et le rayon de convergence de la série entière obtenue.