TD 2 bis – Révisions sur les développements limités – Corrigé

Exercice 1. Entrainement pyramidal.
Donner le développement limité à l'ordre 3 en 0 des fonctions suivantes.

1. $x \longmapsto e^x + \cos(x)$
2. $x \longmapsto \ln(1+x) + \sin(x)$
3. $x \longmapsto \cos(x)\sin(x)$
4. $x \longmapsto \arctan(x)$
5. $x \longmapsto \ln(\cos(x))$
6. $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$
7. $x \longmapsto \dfrac{\cos^2(x)}{3+x^2}$
8. $x \longmapsto \dfrac{1}{e^x-1} - \dfrac{1}{x}$
9. $x \longmapsto \dfrac{\sin(x)}{\ln(1+x)}$
10. $x \longmapsto \left(\dfrac{\sin(x)}{\ln(1+x)}\right)^2$
11. $x \longmapsto \dfrac{\cos(x)}{1-x}$
12. $x \longmapsto \ln(1+x)\dfrac{\sin(x)}{x}$
13. $x \longmapsto \exp(\sin(x))$

Solution de l'exercice 1.

1. En sommant terme à terme les DL_3 de $x \mapsto e^x$ et de $x \mapsto \cos(x)$, on obtient
$$e^x + \cos(x) \underset{x\to 0}{=} 2 + x + \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$
2. De même, $\ln(1+x) + \sin x \underset{x\to 0}{=} 2x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$.
3. Pour un produit, il faut bien avoir en tête que pour x au voisinage de 0, on a $x^k o(x^n) = o(x^{k+n})$. Une manière systématique d'obtenir le DL_3 est d'écrire les DL_3 des deux fonctions, et de ne garder que les termes qui ne sont pas des $o(x^3)$. Ici si on développe tout on a, pour x au voisinage de 0 :
$$\begin{aligned}\cos x \sin x &= (1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3))(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3))\\ &= x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{12} + o(x^5) + o(x^4) + o(x^6) + o(x^6)\\ &= x - \frac{2}{3}x^3 + o(x^3).\end{aligned}$$
dans la pratique on n'écrit pas les termes en $o(x^3)$ qui sont apparus et on mettrait le $o(x^3)$ à la fin, ce qui donne directement, pour x au voisinage de 0 :
$$\begin{aligned}\cos x \sin x &= (1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3))(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3))\\ &= x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^3}{2} + o(x^3)\\ &= x - \frac{2}{3}x^3 + o(x^3).\end{aligned}$$
Remarque : ici on a du sin donc pas de terme d'ordre 0 donc on aurait pu se contenter du DL_2 de cos (mais ça n'aurait pas simplifié le calcul puisqu'il n'y a pas de terme d'ordre 3 dans le DL_3 de cos).

4. On va utiliser le théorème d'intégration des DL, car arctan est dérivable de dérivée arctan donnée par $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Comme on va intégrer ce DL, il suffit d'avoir un DL_2 de cette dérivée. Ici comme $\lim_{x \to 0} x^2 = 0$, on a directement, par composition de o :

$$(1+x^2)^{-1} = 1 - x^2 + o(x^2)$$

En intégrant le DL et utilisant que $\arctan(0) = 0$, on obtient

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

5. Ici on va composer un DL dont les deux premiers termes sont nuls, ce qui permet comme précédemment de gagner en précision (par composition de o), mais seulement le DL_2 : on a

$$\begin{aligned}\ln(\cos x) &= \ln(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)) \\ &= -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + o(x^4) \\ &= -\frac{x^2}{2} + o(x^4) \\ &= -\frac{x^2}{2} + o(x^3).\end{aligned}$$

6. On a $(1-x)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3 + o(x^3)$, en utilisant le DL de $(1+x)^{-1/2}$ et en composant par $x \mapsto -x$ (et en simplifiant les fractions !).

7. On a $\cos^2(x) = (1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3))^2 = 1 - x^2 + o(x^3)$, et

$$\begin{aligned}\frac{1}{3+x^2} &= \frac{1}{3}\frac{1}{1+\frac{1}{3}x^2} \\ &= \frac{1}{3}(1 - \frac{1}{3}x^2 + o(x^3)),\end{aligned}$$

la dernière égalité provenant du fait que le terme d'après du DL serait d'ordre $4(\frac{1}{9}x^4)$, donc en $o(x^3)$. En faisant le produit des DL, on obtient donc :

$$\frac{\cos^2 x}{3+x^2} = \frac{1}{3}(1 - \frac{4}{3}x^2 + o(x^3)) = \frac{1}{3} - \frac{4}{9}x^2 + o(x^3).$$

8. Ici, on va devoir factoriser par $\frac{1}{x}$, ce qui nous fera perdre un ordre de DL, et ensuite diviser par x, ce qui nous fera encore perdre un ordre. Il faut donc commencer par un DL à l'ordre 5 :

$$\begin{aligned}\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} &= \frac{1}{x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)} - \frac{1}{x} \\ &= \frac{1}{x}\left(\frac{1}{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \frac{x^4}{120} + o(x^4)} - 1\right)\end{aligned}$$

On calcule tranquillement les puissances :

$$\begin{aligned}\left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \frac{x^4}{120} + o(x^4)\right)^2 &= \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{6} + \frac{5x^4}{72} + o(x^4) \\ \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \frac{x^4}{120} + o(x^4)\right)^3 &= \frac{x^3}{8} + \frac{x^4}{8} + o(x^4) \\ \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \frac{x^4}{120} + o(x^4)\right)^4 &= \frac{x^4}{16} + o(x^4).\end{aligned}$$

(le dernier calcul se fait aussi directement en raisonnant sur les équivalents en 0). On obtient :

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+\frac{x^3}{24}+\frac{x^4}{120}+o(x^4)} &= 1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{6}-\frac{x^3}{24}-\frac{x^4}{120}\\ &+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{6}+\frac{5x^4}{72}\\ &-\frac{x^3}{8}-\frac{x^4}{8}\\ &+\frac{x^4}{16}+o(x^4).\end{aligned}$$

et donc $\frac{1}{1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+\frac{x^3}{24}+\frac{x^4}{120}+o(x^4)} = 1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{12}-\frac{x^4}{720}+o(x^4)$. Revenons à notre question initiale :

$$\begin{aligned}\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x} &= \frac{1}{x}\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{12}-\frac{x^4}{720}+o(x^4)\right)\\ &= -\frac{1}{2}+\frac{x}{12}-\frac{x^3}{720}+o(x^3).\end{aligned}$$

En particulier, cette expression a une limite finie quand x tend vers 0, égale à $\frac{-1}{2}$.

9. On va perdre un ordre de DL car le dénominateur équivaut à x quand x tend vers zéro. On écrit donc :

$$\begin{aligned}\frac{\sin(x)}{\ln(1+x)} &= \frac{x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)}{x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+o(x^4)}\\ &= \frac{1-\frac{x^2}{6}+o(x^3)}{1-x(\frac{1}{2}-\frac{x}{3}+\frac{x^2}{4})+o(x^3)}\\ &= \left(1-\frac{x^2}{6}+o(x^3)\right)\left(1+x(\frac{1}{2}-\frac{x}{3}+\frac{x^2}{4})+x^2(\frac{1}{4}-\frac{x}{3})+\frac{x^3}{8}+o(x^3)\right)\\ &= \left(1-\frac{x^2}{6}+o(x^3)\right)\left(1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{12}+\frac{x^3}{24}+o(x^3)\right)\\ &= 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{24}+o(x^3).\end{aligned}$$

10. On peut réutiliser la question précédente :

$$\begin{aligned}\left(\frac{\sin(x)}{\ln(1+x)}\right)^2 &= \left(1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{24}+o(x^3)\right)\left(1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{24}+o(x^3)\right)\\ &= 1+x-\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{3}+o(x^3).\end{aligned}$$

11. On a

$$\begin{aligned}\frac{\cos(x)}{1-x} &= (1-\frac{x^2}{2}+o(x^3))(1+x+x^2+x^3+o(x^3))\\ &= 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2}+o(x^3).\end{aligned}$$

12. On a un x en facteur dans le DL de $\ln(1+x)$, donc faire un DL_2 de $\frac{\sin(x)}{x}$ suffit, ce qui nécessite un DL_3 de sin :

$$\begin{aligned}\ln(1+x)\frac{\sin x}{x} &= \left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)\left(1-\frac{x^2}{6}+o(x^2)\right)\\ &= x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3).\end{aligned}$$

13. On a enfin

$$\begin{aligned}\exp(\sin(x)) &= \exp\left(x\left(1-\frac{x^2}{6}\right)+o(x^3)\right)\\ &= 1+x\left(1-\frac{x^2}{6}\right)+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\\ &= 1+x+\frac{x^2}{3}+o(x^3).\end{aligned}$$

Exercice 2. Ailleurs qu'en zéro.

1. Donner le développement limité à l'ordre 2 de exp en 5.
2. Donner le développement limité à l'ordre 3 de $x \longmapsto \cos(\ln(x))$ en 1.
3. Donner le développement limité à l'ordre 3 de sin en $\frac{\pi}{4}$.

Solution de l'exercice 2. Tous les DL se trouvent en se ramenant en 0.

1. On pose $x = 5+h$, alors on a

$$\exp(5+h) = \exp(5)\exp(h) \underset{h\to 0}{=} \exp(5)\left(1+h+\frac{h^2}{2}\right)+o(h^2),$$

d'où le $\mathrm{DL}_2(5)$ qui est donné par :

$$\exp(x) \underset{x\to 5}{=} \exp(5)+\exp(5)(x-5)+\frac{\exp(5)}{2}(x-5)^2+o((x-5)^2).$$

2. On pose $x = 1+h$, alors on a

$$\begin{aligned}\cos(\ln(1+h)) &\underset{h\to 0}{=} \cos\left(h-\frac{h^2}{2}+o(h^2)\right)\\ &\underset{h\to 0}{=} 1-\frac{1}{2}\left(h-\frac{h^2}{2}+o(h^2)\right)^2+o(h^3)\\ &\underset{h\to 0}{=} 1-\frac{h^2}{2}+\frac{h^3}{2}+o(h^3).\end{aligned}$$

Le DL demandé est donc

$$\cos(\ln(x)) \underset{x\to 1}{=} 1-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{2}+o((x-1)^3).$$

3. Voici une autre manière de présenter les choses. On écrit directement, pour x au voisinage de $\frac{\pi}{4}$,

$$\begin{aligned}\sin(x) &= \sin(\frac{\pi}{4}+(x-\frac{\pi}{4}))\\ &= \sin(\frac{\pi}{4})\cos(x-\frac{\pi}{4})+\cos(\frac{\pi}{4})\sin(x-\frac{\pi}{4})\\ &\underset{x\to\pi/4}{=} \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1-\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2+(x-\frac{\pi}{4})-\frac{(x-\frac{\pi}{4})^3}{6}+o((x-\frac{\pi}{4})^3)\right)\\ &\underset{x\to\pi/4}{=} \frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2-\frac{1}{6\sqrt{2}}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3+o\left(\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3\right).\end{aligned}$$

Notez qu'on a pu passer de la deuxième à la troisième ligne parce que $x-\pi/4$ tend vers 0 lorsque x tend vers $\pi/4$ et on connait le DL en 0 de cos et sin.

Exercice 3. La puissance d'une chainette.
Donner le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction

$$f : x \longmapsto \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^{\frac{1}{x}}.$$

Solution de l'exercice 3. On a, pour x au voisinage épointé de 0 :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \exp\left(\frac{1}{x}\ln\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)\right) \\
&= \exp\left(\frac{1}{x}\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^4}{8} + o(x^4)\right)\right) \\
&= \exp\left(\frac{x}{2} - \frac{x^3}{12} + o(x^3)\right) \\
&= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{48} + o(x^3) \\
&= 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} + o(x^3).
\end{aligned}$$

Exercice 4. Calculs de limites.
Calculer, si elles existent, les limites suivantes.

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}$.
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.
3. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x - \sin(x))}{\sqrt{1+x^3} - 1}$.
4. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sin^4(x)}\left[\sin\left(\frac{x}{1+x}\right) - \frac{\sin(x)}{1+\sin(x)}\right]$.

Solution de l'exercice 4.

1. Pour calculer une limite, on doit faire un DL_0. Pour avoir le DL_0 de l'expression donnée, on va factoriser par $\frac{1}{x}$ puis diviser par x, ce qui va nous faire perdre deux ordres. On doit donc calculer donc le DL_2 de $\frac{1}{\ln}(1+x)$. On a, pour x au voisinage épointé de 0,
$$\begin{aligned}
\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} &= \frac{1}{x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)} - \frac{1}{x} \\
&= \frac{1}{x}\left(\frac{1}{1 - \frac{x}{2} + o(x)} - 1\right) \\
&= \frac{1}{x}\left(1 + \frac{x}{2} - 1 + o(x)\right) \\
&= \frac{1}{2} + o(1),
\end{aligned}$$
donc la limite recherchée existe et vaut $\frac{1}{2}$.
2. On a, pour x au voisinage épointé de 0,
$$\begin{aligned}
\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} &= \exp\left(\frac{1}{x^2}\ln(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3))\right) \\
&= \exp(\frac{-1}{6} + o(1))
\end{aligned}$$
donc par continuité de la fonction exponentielle, on a
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \exp(-\frac{1}{6}).$$

3. Étudions le terme du haut : on a $x - \sin x =_{x\to 0} \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ et donc par composition de DL $\sin(x - \sin x) =_{x\to 0} \frac{x^3}{6} + o(x^3)$. Pour le terme du bas on a $\sqrt{1+x^3} - 1 = \frac{x^3}{2} + o(x^3)$. Donc le terme du haut équivaut à $\frac{x^3}{6}$ tandis que celui du bas équivaut à $\frac{x^3}{2}$, ainsi par quotient d'équivalents on a
$$\frac{\sin(x - \sin(x))}{\sqrt{1+x^3} - 1} \sim \frac{1}{3},$$
donc la limite recherchée existe et est égale à $\frac{1}{3}$.

4. Par produit on a $\sin^4(x) \sim x^4$, et donc il va falloir chercher le $\mathrm{DL}_4(0)$ du terme entre crochets. On a d'abord
$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{x}{1+x}\right) &= \sin\left(x - x^2 + x^3 - x^4 + o(x^4)\right)\\ &= x - x^2 + x^3 - x^4 - \frac{1}{6}(x^3 - 3x^4) + o(x^4)\\ &= x - x^2 + \frac{5}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^4 + o(x^4).\end{aligned}$$
D'autre part,
$$\begin{aligned}\frac{\sin x}{1+\sin x} &= (x - \frac{x^3}{6} + o(x^4))\left(1 - x + \frac{x^3}{6} + x^2 - x^3 + o(x^3)\right)\\ &= (x - \frac{x^3}{6} + o(x^4))\left(1 - x + x^2 - \frac{5x^3}{6} + o(x^3)\right)\\ &= x - x^2 + \frac{5}{6}x^3 - \frac{2x^4}{3} + o(x^4)\end{aligned}$$
En faisant la différence, on obtient alors
$$\sin\left(\frac{x}{1+x}\right) - \frac{\sin(x)}{1+\sin(x)} = \frac{1}{6}x^4 + o(x^4) \sim \frac{1}{6}x^4,$$
et donc par produit d'équivalent la limite recherchée existe est égale à $\frac{1}{6}$.