
TD 4 – Séries génératrices et révisions de probabilités

Exercice 1. Poker.

On considère un jeu de 52 cartes¹. Au poker, on a une main de 5 cartes, distribuée aléatoirement. Calculer la probabilité d'obtenir un brelan (3 cartes du même rang), une quinte (5 cartes dont les rangs se suivent cycliquement²), une couleur (toutes les cartes sont de la même couleur), et enfin un full (3 cartes de rang identiques et 2 cartes d'un autre rang identique).

Exercice 2. Lancer de dé.

Maghla joue avec un dé équilibré et cherche à faire un 6.

1. Donner l'espérance du nombre d'essais qu'il lui faudra.
2. Donner la médiane du nombre de lancers qu'il lui faudra, c'est-à-dire le nombre de lancers au bout duquel elle peut affirmer, si elle ne fait pas 6 jusque là, qu'elle avait moins d'une chance sur deux pour que ça arrive.

Exercice 3. Dés pipés.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Donner la série génératrice de la loi uniforme sur $\{1, \dots, n\}$ et calculer sa somme, que l'on note P_n .
2. Si on lance deux dés à 6 faces équilibrés et que l'on fait la somme, quel est le résultat le plus probable ? Le moins probable ? On utilisera P_6 .
3. Donner les racines du polynôme $P = X^2 + X^3 + \dots + X^{12}$.
4. En déduire que P ne peut pas s'écrire Q^2 , où Q est un polynôme.
5. Démontrer qu'on ne peut pas construire deux dés à 6 faces pipés identiques de sorte que leur somme suive la loi uniforme sur $\{2, \dots, 12\}$.³

Exercice 4. Envoyez vos dons.

Sur Wikipédia, pendant l'appel à dons annuel, 10 personnes choisissent en moyenne de faire un don chaque minute. Chaque personne qui décide de faire un don donne 1 euro avec 9 chances sur 10, 10 euros avec 1 chance sur 10, indépendamment des dons précédents et du nombre de dons à cette minute. Proposer en la justifiant une loi simple pour le nombre de personnes qui donnent 1 euros la prochaine minute, et du nombre de personnes qui donnent 10 euros la prochaine minute. Ces deux variables aléatoires sont elles alors indépendantes ?

Exercice 5. There can be only one.

Vous participez à un loto un peu particulier : il y a une chance sur un million de gagner, mais s'il y a plusieurs personnes qui trouvent les numéros gagnants, la gagnante est tirée au sort parmi ces personnes. Il y a un million de personnes qui participent, plus vous, et vous avez trouvé les numéros gagnants. Quelle est la probabilité que vous gagniez effectivement ? On commencera par modéliser le nombre de personnes autres que vous qui gagnent.

1. On rappelle que les cartes ont un rang (par rang croissant : de 2 jusqu'à 10, Valet, Dame, Roi, As soit 13 possibilités) et une couleur parmi 4 possibles (Pique, Trèfle, Coeur, Carreau).

2. L'As suit le Roi, et le 2 suit l'As.

3. Mais en utilisant des dés différents, c'est possible !