TD 5 – Séries génératrices et processus de Galton-Watson

Exercice 1. Retour sur la fonction génératrice.
Soit X une variable aléatoire discrète (à valeurs dans $\mathbb{N}$), dont on rappelle que la série génératrice a rayon de convergence $R \geqslant 1$.

1. Montrer que la somme f_X de sa série génératrice est continue sur $[-1, 1]$.
2. Montrer que f_X est croissante sur $[0, 1]$ et que ses dérivées sucessives sont croissantes sur $[0, 1[$.
3. Montrer que f_X est convexe sur $[0, 1]$.
4. Montrer que l'on a toujours
$$\mathbb{E}(X) = \lim_{x \to 1^-} f_X'(x).$$
On distinguera selon le cas $R = 1$ ou non.

Exercice 2. Dynamique des populations draconiques.
Au commencement, il y avait $N_0 \geqslant 1$ oeufs de dragons, qui au bout de 50 ans donnent des dragons adultes qui pondent un nombre aléatoire d'oeufs. Ces nombres suivent tous la loi d'une variable aléatoire D à valeurs dans $\mathbb{N}$, et sont tous indépendants. Après avoir pondu, les dragons disparaissent, et 50 ans plus tard, les N_1 dragons adultes sortis des oeufs peuvent à nouveau pondre un nombre aléatoire d'oeufs, suivant toujours la loi de D, et indépendants entre eux de sorte que 50 ans après leur disparition, il y ait N_2 adultes qui pondent, et ainsi de suite. L'évolution de la population des dragons est ainsi décrite par une suite de variables aléatoires $(N_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Dans cet exercice, on va discuter le risque que les dragons finissent par disparaitre.

1. Montrer que si $\mathbb{P}(D = 0) = 0$ alors presque sûrement, les dragons ne disparaitrons jamais.
2. Montrer que si $\mathbb{P}(D = 0) = 1$ alors presque sûrement, les dragons finiront par disparaitre.
3. Par la suite, on suppose $0 < \mathbb{P}(D = 0) < 1$. Montrer que la probabilité que les dragons finissent par disparaitre est non nulle.
4. Exprimer la fonction génératrice de N_1 en fonction de celle de D et de N_0.
5. Exprimer la fonction génératrice de N_{k+1} en fonction de celle de D et de celle de N_k. On cherchera à exprimer N_{k+1} comme somme aléatoire de variables aléatoires.
6. En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$,
$$f_{N_k}(z) = \big(\underbrace{f_D \circ f_D \circ \cdots \circ f_D}_{k \text{ fois}}(z)\big)^{N_0}$$
7. Déterminer le nombre d'éléments $x \in [0, 1]$ tels que $f_D(x) = x$ si f_D est dérivable en 1 et $f_D'(1) > 1$.
8. Même question si f_D est dérivable en 1 et $f_D'(1) \leqslant 1$.
9. Caractériser en fonction de l'espérance de D le fait que les dragons finissent par disparaitre presque sûrement.