TD 6 – Retour au casino et devoir maison

Exercice 1. Ruine au casino. Au casino, une personne a 1 euro, et à chaque fois qu'elle joue, avec probabilité 1/2 elle gagne 1 euro, avec probabilité 1/2 elle perd 1 euro. Cette personne va jouer jusqu'à ce qu'elle n'ait plus d'argent, en particulier il est a priori possible qu'elle ne s'arrête jamais de jouer. On note $T : \Omega \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ le nombre total de parties jouées, en particulier $T = n$ ssi la personne a fini par être ruinée à la n-ième partie.

1. Que vaut $\mathbb{P}(T = 1)$?
2. On définit la série génératrice de T comme la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \mathbb{P}(T = n)z^n$.
   a) Montrer que son rayon de convergence est $\geqslant 1$.
   b) Montrer que sa somme $f_T(z)$ est bien définie lorsque $z = 1$.
   c) Exprimer en fonction de $f_T(1)$ la probabilité que la joueuse ne s'arrête jamais.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $p_n = \mathbb{P}(T = n)$.
   a) Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, on a $p_{n+1} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} p_k p_{n-k}$.
   b) On note, pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$. Montrer que
   $$f_T(z) = \frac{z}{2}\left(1 + f_T(z)^2\right).$$
   c) En déduire que pour tout $t \in]-1, 1[\setminus\{0\}$ on a
   $$f_T(t) = \frac{1-\sqrt{1-t^2}}{t}.$$
4. En déduire que presque sûrement, la joueuse finira par être ruinée.
5. Calculer l'espérance du nombre de fois que la joueuse joue.
6. Donner pour tout $n \in \mathbb{N}$ la probabilité que $T = n$.
7. On suppose maintenant que la probabilité de perdre 1 euro est $p \in]0, 1[$.
   a) Dire en fonction de p la probabilité que la joueuse finisse par être ruinée.
   b) Pour p tel que la joueuse fini presque sûrement par être ruinée, donner l'espérance du nombre de fois que la joueuse joue.
8. Mêmes questions que 7.a) et 7.b), mais en supposant maintenant que la joueuse commence avec 100 euros.

Solution de l'exercice 1.

1. On a $T = 1$ ssi on perd la première partie, ce qui a probabilité 1/2, d'où $\mathbb{P}(T = 1) = \frac{1}{2}$.
2. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 \leqslant \mathbb{P}(T = n) \leqslant 1$, or le rayon de convergence de la série entière $\sum_n z^n$ est 1 et donc par le théorème de comparaison $R \geqslant 1$.
   b) On a $f_T(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(T = n) = \mathbb{P}(T \in \mathbb{N})$ en particulier $f_T(1)$ est bien définie.
   c) On a $T = \infty$ ssi $T \notin \mathbb{N}$ donc la probabilité que la joueuse ne s'arrête jamais est $1 - f_T(1)$ d'après la question précédente.
3. a) On note B l'évènement "la joueuse gagne au premier coup". On définit alors pour $\omega \in B$, $X(\omega)$ comme étant le temps qu'il faut pour revenir à 1 euro une première fois, et $Y(\omega)$ le temps restant. Alors $T(\omega) = 1 + X(\omega) + Y(\omega)$. La remarque clée est que X et Y sont indépendants (en tant que variables aléatoires sur B) qui suivent la même loi que T. Alors pour $n \geqslant 1$, on a
   $$p_{n+1} = \mathbb{P}(B)\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X = k \text{ et } Y = n-k|B) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} p_k p_{n-k}.$$

b) On a $f_T(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n z^n$ or $p_0 = 0$ et $p_1 = \frac{1}{2}$ donc

$$\begin{aligned} f_T(z) &= \frac{z}{2} + \sum_{n=2}^{+\infty} p_n z^n \\ &= \frac{z}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} p_{n+1} z^{n+1} \\ &= \frac{z}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} p_k p_{n-k}) z^{n+1} \end{aligned}$$

or $p_0 = 0$, donc

$$\begin{aligned} f_T(z) &= \frac{z}{2}(1 + \sum_{n=0}^{+\infty} (\sum_{k=0}^{n} p_k p_{n-k}) z^n) \\ &= \frac{z}{2}(1 + f_T(z)^2) \end{aligned}$$

d'après la formule du produit de Cauchy.

c) Pour $t \in]-1,1[$ on a $t f_T(t)^2 - 2 f_T(t) + t = 0$ d'après la question précédente, donc $f_T(t)$ est une racine de $tX^2 - 2X + t$, de discriminant $4 - 4t^2 \geqslant 0$ pour $t \neq 0$, donc de racines

$$x_1(t) = \frac{1 - \sqrt{1-t^2}}{t} \text{ et } x_2(t) = \frac{1 + \sqrt{1-t^2}}{t},$$

et comme $x_2(t) > 1$, on ne peut avoir $f_T(t) = x_2(t)$, d'où le résultat voulu

$$f_T(t) = \frac{1 - \sqrt{1-t^2}}{t}.$$

4. On a par continuité $f_T(1) = 1$, et donc d'après la question 2.c), la joueuse finira par être ruinée presque sûrement.
5. D'après l'exercice 1 du TD 5, on a $\mathbb{E}(T) = \lim_{t \to 1^-} f_T'(t)$, or $f_T'(t) = \frac{\frac{t}{\sqrt{1-t^2}} - (1-\sqrt{1-t^2})}{t^2}$. et donc $\mathbb{E}(t) = +\infty$.
6. On identifie les coefficients du développement en série entière de l'expression obtenue à la question 3.c).
7. a) On suit la même approche : on note encore $p_n = \mathbb{P}(T = n)$, on a alors $p_{n+1} = (1-p) \sum_{k=0}^{n} p_k p_{n-k}$ par un raisonnement similaire à celui de la question 3.a), et on en déduit comme à la question 3.b) que

$$f_T(z) = pz + (1-p) z f_T(z)^2,$$

puis $f_T(t) = \frac{1 - \sqrt{1-4p(1-p)t^2}}{2(1-p)t}$. En regardant la limite quand t tend vers 1, on obtient $f_T(1) = \frac{1-\sqrt{1-4p+4p^2}}{2(1-p)}$. Or $4p^2 - 4p + 1 = (2p-1)^2$.

On a alors deux cas possibles :

— si $p < \frac{1}{2}$ alors $2p - 1 < 0$ donc $\sqrt{(2p-1)^2} = 1 - 2p$ et donc $f_T(1) = \frac{2p}{2(1-p)} < 1$ ainsi si $p < \frac{1}{2}$ il y a une probabilité $1 - \frac{2p}{2(1-p)} > 0$ de continuer de jouer indéfiniment.

— si $p \geqslant \frac{1}{2}$ alors $2p - 1 \geqslant 0$ donc $\sqrt{(2p-1)^2} = 2p - 1$ et donc $f_T(1) = \frac{1-(2p-1)}{2(1-p)} = 1$, ainsi la joueuse s'arrête presque sûrement.

Exercice 2. Devoir maison : séries entières et suites définies par récurrence.

Le but de cet exercice est d'illustrer comment les séries entières, dont on a vu l'intérêt pour calculer $\mathbb{P}(X = n)$, où X est une variable aléatoire discrète, permettent plus généralement de donner une formule explicite pour certaines suites définies par récurrence.

On considère la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par récurrence par : $a_0 = 1$ et pour tout $n \geqslant 0$,

$$a_{n+1} = 2a_n + 2^n.$$

1. Montrer que la suite (a_n) est croissante et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leqslant 4^n$.
2. On note R le rayon de convergence de la série $\sum a_n z^n$. Montrer que $R \geqslant \frac{1}{4}$.

3. On note, pour $x \in]-R, R[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Montrer que pour tout $x \in]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[$, on a
$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1} x^n = 2f(x) + \sum_{n=0}^{+\infty} (2x)^n.$$
4. En déduire que pour tout $x \in]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[$, on a
$$f(x) - 1 = x\left(2f(x) + \frac{1}{1-2x}\right).$$
5. En déduire une expression pour $f(x)$ sous forme de fraction rationnelle.
6. Développer en série entière l'expression trouvée à la question précédente pour montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = (n+2)2^{n-1}$.

Solution de l'exercice 2.

1. On montre par une récurrence immédiate que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \geqslant 0$. Ensuite, comme pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $a_{n+1} = 2a_n + 2^n \geqslant a_n$, la suite (a_n) est croissante. Enfin, on montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leqslant 4^n$ par récurrence : on a bien $a_0 = 1 \leqslant 4^0$, et pour un $n \in \mathbb{N}$ donné, si $a_n \leqslant 4^n$, alors $a_{n+1} = 2a_n + 2^n \leqslant 2 \cdot 4^n + 2^n \leqslant 2 \cdot 4^n + 4^n \leqslant 4^{n+1}$.
2. Par comparaison, comme la série $\sum 4^n z^n$ a rayon de convergence $1/4$ (conséquence immédiate du critère de Cauchy), on a $R \geqslant \frac{1}{4}$ par la question précédente.
3. Soit $x \in]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[$, d'après la question précédente les sommes $\sum a_n x^n$ et $\sum 2^n x^n$ convergent, et on a alors :
$$\begin{aligned} 2f(x) + \sum_{n=0}^{+\infty} (2x)^n &= 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} 2^n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + 2^n) x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1} x^n. \end{aligned}$$
4. Soit $x \in]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}$. Remarquons que
$$x\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1} x^{n+1} = f(x) - f(0) = f(x) - 1.$$
D'autre part, $\sum_{n=0}^{+\infty} (2x)^n = \frac{1}{1-2x}$ car $x \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$, d'où l'égalité voulue en utilisant la question précédente et ces deux égalités.
5. Soit $x \in]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[$ On déduire de la question précédente que
$$f(x)(1-2x) = \frac{x}{1-2x} + 1,$$
et donc $f(x) = \dfrac{x}{(1-2x)^2} + \dfrac{1}{1-2x}$.
6. On a pour tout $x \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$, $\frac{1}{1-2x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (2x)^n$. En dérivant terme à terme, on obtient que pour tout $x \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$,
$$\frac{2}{(1-2x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n 2^n x^{n-1}.$$
Ainsi, pour tout $x \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$, on a $\frac{x}{(1-2x)^2} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} n2^n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} n2^{n-1} x^n = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} n2^n x^n$ puisque le premier terme de la somme est nul. Finalement, on a donc pour tout $x \in]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[$.
$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n2^{n-1} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} 2^n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (n2^{n-1} + 2^n) x^n.$$
Par unicité des coefficients du développement en série entière, on trouve donc que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = n2^{n-1} + 2^n = (n+2)2^{n-1}$.