
TD 7 – Révisions

Exercice 1. Convergence uniforme.

On définit, pour $n \geq 1$ et $x \geq 0$, $f_n(x) = \sqrt[n]{nx}$.

1. Montrer que (f_n) converge simplement vers une fonction f que l'on déterminera.
2. La convergence est-elle uniforme sur $[0, +\infty[$?
3. Montrer que pour tout $R > 1$, la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f sur $[1, R]$.

Exercice 2. Rayons de convergence.

Déterminer les rayons de convergence des séries entières $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ suivantes où (a_n) est donnée par :

1. $a_n = \frac{i}{\ln(n+3)}$;
2. $a_n = \left(1 + \frac{1}{2n+1}\right)^{n^2}$;
3. $a_n = \sin(2^{-n})$.

Exercice 3. Développement en série entière.

Donner les développements en série entière en 0 des expressions suivantes.

1. $\frac{2}{1+3x}$;
2. $\frac{1}{(1-x^3)^2}$;
3. $\frac{1}{(1-2x)(1-x)}$.

Exercice 4. Une équation différentielle classique.

Retrouver le développement en série entière de la fonction sin en utilisant la caractérisation suivante : c'est l'unique fonction f développable en série entière en 0 solution de l'équation différentielle

$$f'' + f = 0$$

telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$.

Exercice 5. Casque défectueux.

Une entreprise produit des casques sans fil dans deux usines. Dans la première, 1 casque produit sur 1000 a un problème de batterie, dans la deuxième 1 casque produit sur 2000 a un problème de batterie. Un revendeur achète 3000 casques : 2000 viennent de la première usine et 1000 viennent de la deuxième. Estimer la probabilité qu'aucun casque acheté n'ait de problème de batterie.