Contrôle 1 - corrigé

Durée : 1h15.
Toutes les réponses devront être soigneusement justifiées. La qualité de la rédaction sera prise en compte dans le barême.
Les trois derniers exercices contiennent une dernière question bonus à laquelle il est conseillé de réfléchir uniquement si vous avez fini tout le reste. Répondre correctement à toutes les questions en dehors des questions bonus donne la note maximale de 20/20.
Tous documents interdits excepté une feuille A4 manuscrite recto. Calculatrices interdites.

Exercice 1. Valeur absolue (*4 points*). Soit l'équation suivante, d'inconnue x réelle :

$$|3x| + |x+2| = 0. \tag{1}$$

1. Soient a et b deux réels tels que $a \geqslant 0$ et $b \geqslant 0$. Montrer que si $a+b=0$ alors $a=0$ et $b=0$. On pourra comparer a ainsi que b à $a+b$.
2. Montrer que l'équation (1) n'admet pas de solutions. On poura utiliser la question précédente.

Solution de l'exercice 1.

1. Supposons $a+b=0$ avec $a, b \geqslant 0$, alors comme $b \geqslant 0$ on a $a+b \geqslant a+0 \geqslant 0$ donc $0 \geqslant a \geqslant 0$ donc $a=0$. De même comme $a \geqslant 0$ on a $a+b \geqslant b$ donc $0 \geqslant b \geqslant 0$ donc $b=0$. On a donc bien $a=0$ et $b=0$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$ solution de (1). Si on pose $a = |3|\, x \geqslant 0$ et $b = |x+2| \geqslant 0$ on a alors $a+b=0$ d'où $a=b=0$ d'après la question précédente. En particulier $|3|\, x = 0$ d'où $3\,|x| = 0$ d'où $x=0$. Mais alors $b = |x+2| = 2 = 0$, ce qui est absurde. L'équation (1) n'a donc pas de solutions.

Exercice 2. $\mathbb{R}$ est archimédien (*6 points*).
On se propose de redémontrer que $\mathbb{R}$ est archimédien, c'est-à dire que $\forall A \in \mathbb{R}$, $\exists n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant A$. Pour cela on va raisonner par l'absurde. Supposons donc que $\mathbb{R}$ n'est pas archimédien.

1. Exprimer avec des quantificateurs le fait que $\mathbb{R}$ ne soit pas archimédien.
2. En déduire que l'ensemble $\mathbb{N}$ est majoré.
3. Rappeler la définition de la borne supérieure $\sup(B)$ d'un ensemble $B \subseteq \mathbb{R}$, lorsqu'elle existe.
4. Pourquoi peut-on poser $\beta = \sup(\mathbb{N})$?
5. Montrer qu'alors $\beta - 1$ n'est pas un majorant de $\mathbb{N}$.
6. En utilisant le fait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $n+1 \in \mathbb{N}$, en déduire une contradiction.

Solution de l'exercice 2.

1. $\exists A \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, n < A$.
2. D'après la question précédente on a $A \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, n < A$, en particulier $\forall n \in \mathbb{N}, n \leqslant A$ et donc A majore $\mathbb{N}$. Ainsi $\mathbb{N}$ est majoré.
3. La borne supérieure de $B \subseteq \mathbb{R}$ est le plus petit de ses majorants, c'est-à-dire le minimum de l'ensemble des majorants de B.
4. L'ensemble $\mathbb{N}$ est non vide (il contient 0) et majoré d'après la question précédente, donc par la propriété de la borne supérieure il admet une borne supérieure, et on peut donc poser $\beta = \sup(\mathbb{N})$.
5. On a $\beta - 1 < \beta$ donc $\beta - 1$ est strictement inférieur à β, qui est le plus petit des majorants de $\mathbb{N}$. $\beta - 1$ n'est donc pas un majorant de $\mathbb{N}$.
6. On dispose alors de $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > \beta - 1$, d'où $n+1 > \beta$, or $n+1 \in \mathbb{N}$ et β majore $\mathbb{N}$, ce qui est contradictoire.

Exercice 3. Limites et taux d'accroissement (*4 points*). Calculer soigneusement les limites suivantes.

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x}$.
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x}$.
3. (*question bonus*) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{e^x - e}$.

Solution de l'exercice 3.

1. La fonction cos est sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos'(x) = -\sin(x)$. En particulier on a $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-\cos(0)}{x-0} = \cos'(0) = -\sin(0) = 0$, d'où le résultat $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x} = 0$ puisque $\cos(0) = 1$.
2. De même comme la fonction sin est dérivable en 0 on a $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)-\sin(0)}{x-0} = \sin'(0) = \cos(0) = 1$, et donc en passant à l'inverse $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = \frac{1}{1} = 1$.
3. On écrit tout d'abord que pour tout $x \neq 1$,
$$\frac{\ln x}{e^x - e} = \frac{\ln(x)}{x-1}\frac{x-1}{e^x - e} = \frac{\ln(x) - \ln(1)}{x-1} \cdot \frac{1}{\frac{e^x - e^1}{x-1}}$$
Puis, en utilisant la dérivabilité de ln et de exp en 1, et le fait que pour tout $x > 0$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ et $\exp'(x) = \exp(x)$ on obtient que
$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x) - \ln(1)}{x-1} \cdot \frac{1}{\frac{e^x - e^1}{x-1}} = \frac{\frac{1}{1}}{e^1} = e^{-1}$$
d'où $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{e^x - e} = e^{-1}$.

Exercice 4. Une équation (*3 points*). Montrer que l'équation suivante admet une solution dans $[0, \pi^9]$

$$x + 3x^3 + 4x^5 + x^7 = \pi^9. \tag{2}$$

(*question bonus*) Montrer que l'équation admet en fait une unique solution réelle.

Solution de l'exercice 4.

1. Considérons la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f(x) = x + 3x^3 + 4x^5 + x^7.$$
Cette fonction est continue car c'est une fonction polynomiale, et $f(0) = 0$ tandis que $f(\pi^9) = \pi^9 + 3\pi^27 + 4\pi^{45} + \pi^{63}$, or $3\pi^27 + 4\pi^{45} + \pi^{63} > 0$ donc $f(\pi^9) > \pi^9$. On a donc $f(0) \leqslant \pi^9 \leqslant f(\pi^9)$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe alors $x \in [0, \pi^9]$ tel que $f(x) = \pi^9$, donc l'équation (2) admet bien une solution dans $[0, \pi^9]$.
   De plus, la fonction f est strictement croissante comme somme de fonctions strictement croissantes, et donc f est injective : l'équation (2) admet au plus une solution réelle, donc d'après la question précédente l'équation admet une unique solution réelle.

Exercice 5. Dérivabilité et continuité (*3 points*).

1. Calculer la limite $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x}$.
2. En déduire que la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0.
3. Est-il vrai que pour tout intervalle I et toute fonction $f : I \to \mathbb{R}$, si f est continue sur I, alors f est dérivable sur I ? Justifier votre réponse.
4. (*question bonus*) Est-il vrai que pour tout intervalle I et toute fonction $f : I \to \mathbb{R}$, si f est dérivable sur I alors f est continue sur I ? Justifier votre réponse.

Solution de l'exercice 5.

1. Pour tout $x > 0$ on a $\frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{\sqrt{x}}{(\sqrt{x})^2} = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Or on a $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0^+$ par continuité de la fonction racine carrée et le fait qu'elle est à valeurs positives, d'où $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$, d'où $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} = +\infty$.
2. On peut réécrire, pour $x > 0$, $\frac{\sqrt{x}}{x}$ comme un taux d'accroissement : $\frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{0}}{x-0}$ Donc d'après la question précédente, comme ce taux d'acroissement ne tend pas vers un réel quand x tend vers 0^+, la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0 (ici on parle de dérivabilité au bord de l'intervalle de définition $[0, +\infty[$, d'où le fait qu'il y ait une limite à droite).
3. La fonction racine carrée est continue sur $I = [0, +\infty[$ mais pas dérivable en 0 d'après la question précédente, en particulier elle n'est pas dérivable sur I, donc la réponse est non, c'est faux.
4. C'est vrai ; la démonstration repose sur le fait que pour tout $x_0 \in I$ et tout $x \neq x_0$ on peut écrire $f(x) = (x - x_0)\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + f(x_0)$, ce qui en faisant tendre x vers x_0 et en utilisant la dérivabilité en x_0 donne que
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0 \cdot f'(x_0) + f(x_0) = f(x_0),$$
donc f est continue en x_0.