Contrôle 1

Durée : 1h15.
Toutes les réponses devront être soigneusement justifiées. La qualité de la rédaction sera prise en compte dans le barême.
Les trois derniers exercices contiennent une dernière question bonus à laquelle il est conseillé de réfléchir uniquement si vous avez fini tout le reste. Répondre correctement à toutes les questions en dehors des questions bonus donne la note maximale de 20/20.
Tous documents interdits excepté une feuille A4 manuscrite recto. Calculatrices interdites.

Exercice 1. Valeur absolue (*4 points*). Soit l'équation suivante, d'inconnue x réelle :

$$|3x| + |x+2| = 0. \tag{1}$$

1. Soient a et b deux réels tels que $a \geqslant 0$ et $b \geqslant 0$. Montrer que si $a+b=0$ alors $a=0$ et $b=0$. On pourra comparer a ainsi que b à $a+b$.
2. Montrer que l'équation (1) n'admet pas de solutions. On poura utiliser la question précédente.

Exercice 2. $\mathbb{R}$ est archimédien (*6 points*).
On se propose de redémontrer que $\mathbb{R}$ est archimédien, c'est-à dire que $\forall A \in \mathbb{R}$, $\exists n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant A$. Pour cela on va raisonner par l'absurde. Supposons donc que $\mathbb{R}$ n'est pas archimédien.

1. Exprimer avec des quantificateurs le fait que $\mathbb{R}$ ne soit pas archimédien.
2. En déduire que l'ensemble $\mathbb{N}$ est majoré.
3. Rappeler la définition de la borne supérieure $\sup(B)$ d'un ensemble $B \subseteq \mathbb{R}$, lorsqu'elle existe.
4. Pourquoi peut-on poser $\beta = \sup(\mathbb{N})$?
5. Montrer qu'alors $\beta - 1$ n'est pas un majorant de $\mathbb{N}$.
6. En utilisant le fait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $n+1 \in \mathbb{N}$, en déduire une contradiction.

Exercice 3. Limites et taux d'accroissement (*4 points*). Calculer soigneusement les limites suivantes.

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x}$.
2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\sin x}$.
3. (*question bonus*) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln(x)}{e^x - e}$.

Exercice 4. Une équation (*3 points*). Montrer que l'équation suivante admet une solution dans $[0, \pi^9]$

$$x + 3x^3 + 4x^5 + x^7 = \pi^9. \tag{2}$$

(*question bonus*) Montrer que l'équation admet en fait une unique solution réelle.

Exercice 5. Dérivabilité et continuité (*3 points*).

1. Calculer la limite $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\sqrt{x}}{x}$.
2. En déduire que la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0.
3. Est-il vrai que pour tout intervalle I et toute fonction $f : I \to \mathbb{R}$, si f est continue sur I, alors f est dérivable sur I ? Justifier votre réponse.
4. (*question bonus*) Est-il vrai que pour tout intervalle I et toute fonction $f : I \to \mathbb{R}$, si f est dérivable sur I alors f est continue sur I ? Justifier votre réponse.