PeiP IAD/Polytech Dijon
Premiére année
Durée : 70 minutes

29 janvier 2025
Documents interdits sauf une feuille A4 manuscrite
Calculatrices interdites

ANALYSE 1

L'épreuve est notée sur 20, le sujet comporte 18 exercices. Le candidat choisira un ou plusieurs exercices pour un total inférieur ou égal à 20 points. **Toutes les réponses doivent être justifiées.**

Exercice 1 (2 points)

$$|x+2| \leq 1+|x-3| \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} |x+2| \leq 1+|x-3| \\ x \leq -2 \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} |x+2| \leq 1+|x-3| \\ -2 \leq x \leq 3 \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} |x+2| \leq 1+|x-3| \\ x \geq 3 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -x-2 \leq 1-x+3 \\ x \leq -2 \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} x+2 \leq 1-x+3 \\ -2 \leq x \leq 3 \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} x+2 \leq 1+x-3 \\ x \geq 3 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -2 \leq 4 \\ x \leq -2 \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} 2x \leq 2 \\ -2 \leq x \leq 3 \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} 2 \leq -2 \\ x \geq 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow x \leq -2 \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} x \leq 1 \\ -2 \leq x \leq 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow x \leq 1$$

En conclusion, les x réels qui vérifient $|x+2| \leq 1+|x-3|$ sont exactement les points de $]-\infty, 1]$.

Exercice 2 (2 points) Les règles de Bioche suggèrent le changement de variable $u=\cos(x)$ (donc $\mathrm{d}u=-\sin(x)\mathrm{d}x$).

$$\int_0^\pi \cos^3(x)\sin(x)\mathrm{d}x=\int_{u=1}^{-1} -u^3\mathrm{d}u=\left[\frac{-u^4}{4}\right]_1^{-1}=-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=0.$$

Exercice 3 (2 points) Les règles de Bioche suggèrent le changement de variable $u=\cos(x)$ (donc $\mathrm{d}u=-\sin(x)\mathrm{d}x$).

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin(x)}\mathrm{d}x=\int_{\frac{1}{2}}^{0} \frac{-\mathrm{d}u}{1-u^2}=\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}u}{1-u^2}$$

À ce stade, on peut soit connaître une primitive de $u \mapsto \frac{1}{1-u^2}$, soit décomposer en éléments simples :

$$\frac{1}{1-u^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-u}+\frac{1}{1+u}\right)$$

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin(x)}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-u}+\frac{1}{1+u}\right)\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\left[\ln(1+u)-\ln(1-u)\right]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\ln(3).$$

Exercice 4 (2 points) L'expression proposée n'a aucun sens pour x proche de zéro : avec notre définition, la fonction $u \mapsto \operatorname{Argch}(u)$ n'est pas définie pour $u \leq 1$. On peut donc répondre : non, nous ne pouvons pas trouver un réel a et un entier n tels que $\operatorname{Argch}(x^2)-\operatorname{th}(x^2)$ soit équivalent à ax^n quand x tend vers 0.

Exercice 5 (2 points) On commence par se ramener à un quotient et on simplifie un peu le problème par un changement de variable $u = x^3$ et l'utilisation des équivalents classiques de tangente et acrtangente en 0.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\tan(x^3)} - \frac{1}{\operatorname{Arctan}(x^3)} &= \lim_{u\to 0^+} \frac{1}{\tan(u)} - \frac{1}{\operatorname{Arctan}(u)} = \lim_{u\to 0^+} \frac{\operatorname{Arctan}(u) - \tan(u)}{\tan(u)\operatorname{Arctan}(u)} \\ &= \lim_{u\to 0^+} \frac{\operatorname{Arctan}(u) - \tan(u)}{u^2}\end{aligned}$$

On utilise une première fois de la règle de l'Hôpital, et on simplifie en utilisant un équivalent :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\tan(x^3)} - \frac{1}{\operatorname{Arctan}(x^3)} = \lim_{u\to 0^+} \frac{\frac{1}{1+u^2} - (1+\tan^2(u))}{2u} = \lim_{u\to 0^+} \frac{1-(1+u^2)(1+\tan^2(u))}{2u(1+u^2)}.$$

En développant le numérateur, puis en coupant la somme en deux et en factorisant :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\tan(x^3)} - \frac{1}{\operatorname{Arctan}(x^3)} = \lim_{u\to 0^+} \frac{-u^2 - \tan^2(u) - u^2\tan^2(u)}{2u} = \lim_{u\to 0^+} \frac{u}{2}\left(-1 - u\tan^2(u)\right) - \frac{\tan^2(u)}{u}.$$

La parenthèse est clairement bornée, donc le premier terme de la somme tend vers 0, et on conclut, au choix, avec un équivalent de tangente en 0 ou une deuxième application de la règle de l'Hôpital

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\tan(x^3)} - \frac{1}{\operatorname{Arctan}(x^3)} = \lim_{u\to 0^+} -\frac{\tan^2(u)}{u} = \lim_{u\to 0^+} -\frac{u^2}{u} = 0.$$

Exercice 6 (4 points) On utilise la forme canonique du trinôme

$$x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}\left[\frac{4}{3}\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 1\right],$$

ce qui suggère le changement de variable $s = \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$ donc $\mathrm{d}s = \frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{d}x$.

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x+x^2}}\mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}(s^2+1)}}\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{d}s = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{s^2+1}} = [\operatorname{Argsh}(s)]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}.$$

Ici, on peut reconnaître la dérivée d'argument sinus hyperbolique, ou poser $s = \operatorname{sh}(v)$.

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x+x^2}}\mathrm{d}x = \operatorname{Argsh}(\sqrt{3}) - \operatorname{Argsh}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

S'arrêter ici rapportait l'intégralité des points. Les esthètes peuvent utiliser l'expression d'argument sinus hyperbolique en fonction du logarithme pour obtenir une forme plus compacte :

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x+x^2}}\mathrm{d}x = \ln\left(\sqrt{3}+2\right) - \ln(\sqrt{3}) = \ln\left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right).$$

Exercice 7 (4 points) On peut procéder par récurrence sur n pour prouver la propriété

$$P_n : \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=0}^{n} k\right)^2$$

P_0 est vraie, on peut aussi vérifier que P_1 est vraie si on est inquiet par la vacuité de la somme de gauche quand $n = 0$.
Supposons que P_n soit vraie pour un certain entier n. Alors

$$\left(\sum_{k=0}^{n+1} k\right)^2 = \left(\sum_{k=0}^{n} k\right)^2 + 2(n+1)\left(\sum_{k=0}^{n} k\right) + (n+1)^2 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + 2(n+1)\left(\frac{(n+1)(n)}{2}\right) + (n+1)^2,$$

donc

$$\left(\sum_{k=0}^{n+1} k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^2(n) + (n+1)^2 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n^3 + 3n^2 + 3n + 1) = \sum_{k=1}^{n+1} k^3$$

et on a bien prouvé que P_{n+1} était vraie.
Par récurrence, on en déduit que P_n est vraie pour tout n entier naturel.

Exercice 8 (4 points) Une possibilité est d'utiliser le changement de variable $u = \tan\left(\frac{s}{2}\right)$, en se souvenant que $\mathrm{d}t = \dfrac{2\mathrm{d}u}{1+u^2}$ et $\cos(t) = \dfrac{1-u^2}{1+u^2}$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{1+\cos(t)} = \int_0^1 \frac{1}{1+\frac{1-u^2}{1+u^2}} \frac{2\mathrm{d}u}{1+u^2} = \int_0^1 \frac{2\mathrm{d}u}{1+u^2+1-u^2} = \int_0^1 \mathrm{d}u = 1.$$

Exercice 9 (4 points) On reconnaît une équation différentielle ordinaire (EDO) linéaire du premier ordre à coefficients C^∞ définis sur $\mathbf{R}$, donc le problème de Cauchy admet une unique solution maximale, qui sera définie sur $\mathbf{R}$ tout entier.
Appliquons la méthode du cours et cherchons les solutions de l'équation homogène :

$$y'(x) = \cos(x)y(x) \Rightarrow (\exists K \in \mathbf{R})| \quad (\forall x \in \mathbf{R}), \quad y(x) = K\exp(\sin(x))$$

La fonction constante $x \mapsto 1$ est solution évidente de l'équation complète. *(On peut aussi utiliser une variation de la constante si on ne voit pas la solution évidente.)*
Les solutions générales de l'équation complète sont donc de la forme

$$(\forall x \in \mathbf{R}) \quad y(x) = K\exp(\sin(x)) + 1$$

Si on veut $y(0) = 0$ alors $Ke^0 + 1 = 0$ donc $K = -1$.
En conclusion, l'unique solution maximale de $y'(x) = \cos(x)y(x) - \cos(x)$ telle que $y(0) = 0$ est la fonction $y : x \mapsto 1 - \exp(\sin(x))$ définie sur $\mathbf{R}$. Toutes les autres solutions sont des restrictions de cette fonction.

Exercice 10 (4 points) On reconnaît une EDO linéaire du deuxième ordre à coefficients constants et second membre C^0 défini sur $\mathbf{R}$. Le problème de Cauchy de l'énoncé admet une unique solution maximale, qui sera définie sur $\mathbf{R}$ On applique la méthode du cours en résolvant d'abord l'équation caractéristique

$$r^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow r = i \text{ ou } r = -i$$

d'où on déduit la forme générale des solutions de l'équation homogène

$$y_h : x \mapsto K_1\cos(x) + K_2\sin(x)$$

avec K_1 et K_2 deux constantes réelles.

Pour trouver une solution particulière de l'équation complète, on peut utiliser la méthode du cours et passer en complexe. On cherche une solution de $z'' + z = e^{ix}$, dont on prendra la partie réelle. On va chercher z sous la forme $z : x \mapsto xQe^{ix}$, avec Q une constante (complexe) à déterminer. On calcule :

$$z'(x) = e^{ix}(iQx + Q) \qquad z''(x) = e^{ix}(-Qx + 2iQ)$$

Si z est solution de l'équation complète, alors $e^{ix}2iQ = e^{ix}$, donc $Q = \frac{1}{2i} = -\frac{i}{2}$, donc

$$z(x) = -x\frac{i}{2}\cos(x) + x\frac{1}{2}\sin(x).$$

On propose donc la partie réelle de z, $y_p(x) = x\frac{1}{2}\sin(x)$, comme solution particulière
Les solutions générales de l'équation complète sont de la forme $y(x) = K_1\cos(x) + K_2\sin(x) + \frac{x}{2}\sin(x)$, donc $y(0) = K_1$ et $y'(0) = K_2$. Les conditions initiales se traduisent donc $K_1 = K_2 = 1$.
En conclusion, l'unique solution de $y''(x) + y(x) = \cos(x)$ telle que $y(0) = y'(0) = 1$ définie sur $\mathbf{R}$ est

$$y : x \mapsto \cos(x) + \sin(x) + \frac{x\sin(x)}{2}$$

Toutes les autres solutions sont des restrictions de cette fonction.

Exercice 11 (6 points) On va commencer par décomposer la fraction $\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}$ en éléments simples.

$$\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{1}{2(k+1)} - \frac{1}{k+2} + \frac{1}{2(k+3)}$$

Donc, pour n entier

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1} - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+2} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+3}$$

On change de variable de sommation, $u = k+1$ dans la première somme, $u = k+2$ dans la deuxième et $u = k+3$ dans la troisième

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{1}{2}\sum_{u=1}^{n+1}\frac{1}{u} - \sum_{u=2}^{n+2}\frac{1}{u} + \frac{1}{2}\sum_{u=3}^{n+3}\frac{1}{u}$$

Pour u entre 3 (inclus) et $n+1$ (inclus), tous les termes s'éliminent. Il reste

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3}\right)\\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n+2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n+3}\end{aligned}$$

Les deux derniers termes de cette somme tendent vers 0 quand n tend vers l'infini. En conclusion, $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{1}{4}$.

Exercice 12 (6 points) La fonction $y_p : x \mapsto \mathrm{sh}(x)$, définie sur $\mathbf{R}$, est solution évidente[1] .

1. Si on ne l'a pas vu, on reconnaît une équation à variables séparables et on procède comme d'habitude :

$$\int_0^{y(x)}\frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{1+s^2}} = x \Rightarrow \mathrm{Argsh}(y(x)) - \mathrm{Argsh}(0) = x \Rightarrow y(x) = \mathrm{sh}(x).$$

Comme la fonction $u \mapsto \sqrt{1+u^2}$ est C^1 (donc localement lipschtizienne) sur $\mathbf{R}$ tout entier, le problème de Cauchy

$$\left\{\begin{array}{lcl} y'(x) & = & \sqrt{y(x)^2+1} \\ y(0) & = & 0 \end{array}\right.$$

admet une unique solution maximale (c'est une conséquence du théorème de Cauchy-Lipschitz). La fonction y_p est solution maximale (car définie sur $\mathbf{R}$ tout entier) donc c'est l'unique solution maximale au problème de Cauchy posé. Toutes les autres solutions sont des restrictions de y_p.

Exercice 13 (10 points) On reconnaît une équation à variables séparables. Comme la fonction $F : u \mapsto 1+\sin(u)$ est C^1 (donc localement lipschitzienne) sur $\mathbf{R}$ tout entier, on sait par le théorème de Cauchy-Lipschitz que le problème de Cauchy posé admettra une unique solution maximale. Au brouillon, sans se soucier de justifier rigoureusement les calculs, on peut écrire

$$y'(x) = 1+\sin(y(x)) \Rightarrow \frac{y'(x)}{1+\sin(y(x))} = 1 \Rightarrow \int_{s=0}^{x} \frac{y'(s)\mathrm{d}s}{1+\sin(y(s))} = x \Rightarrow \int_0^{y(x)} \frac{\mathrm{d}v}{1+\sin(v)} = x$$

Pour le calcul de l'intégrale, on peut utiliser par exemple le changement de variables $w = \tan(\frac{v}{2})$.

$$\int_0^{y(x)} \frac{\mathrm{d}v}{1+\sin(v)} = \int_0^{\tan(\frac{y}{2})} \frac{2\mathrm{d}w}{(1+w^2)(1+\frac{2w}{1+w^2})} = \int_0^{\tan(\frac{y}{2})} \frac{2\mathrm{d}w}{1+w^2+2w} = \int_0^{\tan(\frac{y}{2})} \frac{2\mathrm{d}w}{(1+w)^2}$$

On s'est ramené, comme prévu, à l'intégration d'une fraction rationnelle, qui se trouve être déjà décomposée en éléments simples.

$$\int_0^{y(x)} \frac{\mathrm{d}v}{1+\sin(v)} = -2\left[\frac{1}{1+w}\right]_0^{\tan(\frac{y(x)}{2})} = 2-2\frac{1}{1+\tan\left(\frac{y(x)}{2}\right)}.$$

On essaye maintenant d'exprimer y en fonction de x :

$$2-2\frac{1}{1+\tan\left(\frac{y(x)}{2}\right)} = x \Rightarrow 1+\tan\left(\frac{y(x)}{2}\right) = \frac{2}{2-x} \Rightarrow \tan\left(\frac{y(x)}{2}\right) = \frac{2}{2-x}-1 = \frac{x}{2-x}.$$

Un problème est que la fonction tangente n'est pas injective. Avec l'équation précédente, nous avons la valeur de $\frac{y(x)}{2}$ à $k\pi$ près. Comme $y(0)=0$, on est sûr que $y(x)$ appartient à $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ au moins pour x proche de zéro. On en déduit :

$$\frac{y(x)}{2} = \operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{2-x}\right) \Rightarrow y(x) = 2\operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{2-x}\right)$$

N'oublions pas que nous avons obtenu l'expression de y ci-dessus uniquement quand $\frac{y}{2} \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, donc quand $y(x) \in]-\pi,\pi[$. Quand x tend vers 2^-, $y(x)$ tend vers π. Si on veut prolonger la solution après $x=2$, forcément avec y localement croissante puisque y' ne prend que des valeurs positives, $\frac{y}{2}$ sera donc dans $\left]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right[$, et il va falloir corriger l'expression précédente. Pour $x>2$, suffisamment proche de 2,

$$\frac{y(x)}{2} = \operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{2-x}\right)+\pi \Rightarrow y(x) = 2\operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{2-x}\right)+2\pi.$$

Cette expression reste valable tant que $y(x) < 3\pi$, ce qui est le cas pour tous les $x>2$.

Au propre, nous introduisons la fonction

$$\begin{array}{rcll} y: \mathbf{R} & \to & \mathbf{R} & \\ x & \mapsto & 2\,\text{Arctan}\left(\dfrac{x}{2-x}\right) & \text{si } x<2 \\ 2 & \mapsto & \pi & \\ x & \mapsto & 2\,\text{Arctan}\left(\dfrac{x}{2-x}\right)+2\pi & \text{si } x>2 \end{array}$$

La fonction est bien définie, continue sur $\mathbf{R}$. Il est clair que y est dérivable sur $\mathbf{R}\setminus\{2\}$. En 2^-, on peut utiliser la règle de l'Hôpital :

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{1}{x-2}\left(2\,\text{Arctan}\left(\frac{x}{2-x}\right)-\pi\right)=\lim_{x\to 2^-}\frac{2}{1+\left(\frac{x}{2-x}\right)^2}\frac{2-x+x}{(2-x)^2}=1=1+\sin(y(2))$$

Le même calcul donne le même résultat en 2^+ et on en déduit que y est dérivable sur $\mathbf{R}$. Le calcul au brouillon initial, maintenant que nous connaissons l'expression de y, peut être relu dans l'ordre inverse en justifiant chaque étape, et suffit à montrer que $y'=1+\sin(y)$. La fonction y est donc solution (forcément maximale car définie sur $\mathbf{R}$) du problème de Cauchy, et d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz toutes les autres solutions sont des restrictions de y. Pour les gens très méticuleux, et dans un but pédagogique, on donne ci-dessous la vérification directe (inutile dans notre cas) du fait que $y'=1+\sin(y)$.

Complément : calcul direct de la dérivée de y

Pour $x\neq 2$,

$$y'(x)=\frac{2}{1+\left(\frac{x}{2-x}\right)^2}\frac{2-x+x}{(2-x)^2}=\frac{4}{(2-x)^2+x^2}$$

Par ailleurs, pour $x<2$,

$$\sin(y(x))=2\sin\left(\text{Arctan}\left(\frac{x}{2-x}\right)\right)\cos\left(\text{Arctan}\left(\frac{x}{2-x}\right)\right)$$

On peut se souvenir ici que $\sin(\text{Arctan}(u)=\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}$ et $\cos(\text{Arctan}(u)=\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}$.

$$\sin(y(x))=2\frac{\frac{x}{2-x}}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{2-x}\right)^2}}\sqrt{\frac{1}{1+\left(\frac{x}{2-x}\right)^2}}=\frac{2x}{2-x}\frac{1}{1+\left(\frac{x}{2-x}\right)^2}=\frac{2x(2-x)}{(2-x)^2+x^2}$$

Il reste à calculer $1+\sin(y(x))$:

$$1+\sin(y(x))=\frac{(2-x)^2+x^2+2x(2-x)}{(2-x)^2+x^2}=\frac{(2-x+x)^2}{(2-x)^2+x^2}=\frac{4}{(2-x)^2+x^2}=y'(x).$$

Le calcul est identique pour $x>2$.

Exercice 14 (10 points) On peut, au choix, reconnaître une équation de Riccati avec solution évidente $y_p=1$, ou reconnaître une équation à variables séparables. On va utiliser ici l'approche Riccati.

Comme la fonction constante $x\mapsto 1$ est solution évidente de l'équation complète (mais ne vérifie pas les conditions initiales), on cherche les solutions sous la forme $y=1+u$. Dans ce cas, on doit avoir

$$u'=5-6(1+u)+(1+u)^2=-1-6u+1+2u+u^2=-4u+u^2$$

et, sans surprise, u est solution d'une équation de Bernoulli. On écrit

$$\frac{u'}{u^2} = -4\frac{1}{u} + 1,$$

on pose $z = \frac{1}{u}$, donc z est solution de l'équation linéaire

$$-z' = -4z + 1$$

avec $z(0) = \frac{1}{u(0)} = \frac{1}{y(0)-1} = -1$. Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions $x \mapsto Ke^{4x}$ avec K une constante réelle. La solution constante $x \mapsto \frac{1}{4}$ est solution évidente de l'équation complète, donc les solutions générales de l'équation complète sont $z : x \mapsto \frac{1}{4} + Ke^{4x}$. On veut avoir $z(0) = -1$ donc $K = -\frac{5}{4}$. On vient de trouver

$$z : x \mapsto \frac{1}{4} - \frac{5}{4}e^{4x} = \frac{1}{4}(1 - 5e^{4x})$$

donc

$$u : x \mapsto \frac{1}{z(x)} = \frac{4}{1 - 5e^{4x}} \text{ et } y : x \mapsto 1 + \frac{4}{1 - 5e^{4x}}$$

définie pour x tel que $1 - 5e^{4x} < 0$ donc $x > \frac{1}{4}\ln\left(\frac{1}{5}\right) = -\ln(\sqrt[4]{5})$.

La fonction

$$\begin{array}{llll} y &]-\ln(\sqrt[4]{5}), +\infty[& \to & \mathbf{R} \\ & x & \mapsto & 1 + \dfrac{4}{1 - 5e^{4x}} \end{array}$$

est solution du problème de Cauchy posée, et c'est une solution maximale (elle n'est pas bornée en $-\ln(\sqrt[4]{5})^+$ donc pas prolongeable). Par le théorème de Cauchy-Lipschitz, c'est l'unique solution maximal au problème de Cauchy posé. Toutes les autres solutions sont des restrictions de y.

Exercice 15 (10 points)

On reconnaît une équation à variables séparables. Commençons par écrire le trinôme sous la forme canonique

$$u^2 + u + 1 = \left(u + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}\left(\frac{2^2}{\sqrt{3}^2}\left(u + \frac{1}{2}\right)^2 + 1\right) = \frac{3}{4}\left(\left(\frac{2u+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1\right)$$

La fonction $F : u \mapsto \sqrt{u^2 + u + 1}$ est donc C^1 (donc localement lipschitzienne) sur $\mathbf{R}$. Par le théorème de Cauchy-Lipschitz, le problème de Cauchy admettra une unique solution maximale, qu'on peut chercher sans trop se soucier de justifier rigoureusement les calculs (il suffira de vérifier à la fin que nous avons bien trouvé une solution).

$$y'(x) = \sqrt{y^2(x) + y(x) + 1} \Rightarrow \frac{y'(x)}{\sqrt{y^2(x) + y(x) + 1}} = 1 \Rightarrow \int_0^x \frac{y'(s)\mathrm{d}s}{\sqrt{y^2(s) + y(s) + 1}} = x$$

On procède au changement de variable $u = y(x)$ puis, inspiré par la décomposition canonique du trinôme, $v = \frac{2u+1}{\sqrt{3}}$.

$$\int_0^x \frac{y'(s)\mathrm{d}s}{\sqrt{y^2(s) + y(s) + 1}} = \int_0^{y(x)} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2 + u + 1}} = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{2y(x)+1}{\sqrt{3}}} \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{d}v}{\sqrt{\frac{3}{4}(v^2 + 1)}} = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{2y(x)+1}{\sqrt{3}}} \frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{v^2 + 1}}.$$

Si on connaît son cours on a reconnu la dérivée d'argument sinus hyperbolique. Si on connaît moins bien son cours, on pose $w = \mathrm{sh}(v)$. Dans les deux cas, on arrive à

$$\mathrm{Argsh}\left(\frac{2y(x)+1}{\sqrt{3}}\right) - \mathrm{Argsh}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = x$$

donc

$$\mathrm{Argsh}\left(\frac{2y(x)+1}{\sqrt{3}}\right) = x + \mathrm{Argsh}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \Rightarrow \frac{2y(x)+1}{\sqrt{3}} = \mathrm{sh}\left(x + \mathrm{Argsh}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right),$$

et enfin

$$y(x) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}\,\mathrm{sh}\left(x + \mathrm{Argsh}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) - 1\right).$$

Au propre, on définit la fonction

$$\begin{array}{rccl} y: & \mathbf{R} & \to & \mathbf{R} \\ & x & \mapsto & \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}\,\mathrm{sh}\left(x + \mathrm{Argsh}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) - 1\right) \end{array}$$

La fonction y est clairement dérivable sur $\mathbf{R}$, elle est solution du problème de Cauchy posé (soit on le vérifie directement, soit on reprend le calcul précédent mais à l'envers en vérifiant que touts ce qu'on écrit á un sens, c'est possible puisque maintenant on connaît l'expression de y). En conclusion, la fonction y définie ci-dessus est l'unique solution maximale au problème de Cauchy posé. Toutes les autres solutions sont des restrictions de y.

Exercice 16 (10 points)
On reconnaît une équation à variables séparables. Commençons par écrire le trinôme sous la forme canonique, puis factorisons le.

$$u^2 - 4u + 3 = (u-2)^2 - 1 = (u-3)(u-1)$$

On en déduit que $u \mapsto u^2 - 4u + 3$ prend des valeurs positives sur $]-\infty, 1] \cup [3, +\infty[$, donc l'équation proposée n'a de sens que si $y(x) \leq 1$ ou $y(x) \geq 3$. Comme $y(0) = 0$ et y est continue, les éventuelles solutions seront à valeurs dans $]-\infty, 1]$.
La fonction $F : u \mapsto \sqrt{u^2 - 4u + 3}$ est C^1 (donc localement lipschitzienne) sur $]-\infty, 1[$ mais pas localement lipschitzienne autour de 1^-. On ne pourra donc appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz à l'équation $y'(x) = \sqrt{y^2(x) - 4y(x) + 3}$ que tant que $y(x)$ sera dans $]-\infty, 1[$. En d'autres termes, on redoute une perte d'unicité locale des solutions quand y tend vers 1.
On va deviner un candidat solution pour x assez proche de zéro. Les calculs qui suivent n'ont pas besoin d'être justifiés rigoureusement à chaque étape, il suffira de vérifier que le candidat que nous trouvons est bien solution et d'invoquer le théorème de Cauchy-Lipschitz pour garantir l'unicité locale de la solution trouvée.

$$y'(x) = \sqrt{y^2(x) - 4y(x) + 3} \Rightarrow \frac{y'(x)}{\sqrt{y^2(x) - 4y(x) + 3}} = 1 \Rightarrow \int_0^{y(x)} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2 - 4u + 3}} = x.$$

Pour calculer l'intégrale, on utilise la forme canonique du trinôme qui suggère le changement de variable $s = u - 2$. Ensuite, on peut connaître le cours et reconnaître la dérivée d'argument cosinus hyperbolique, ou proposer un changement de variable du style $s = \mathrm{ch}(v)$. Le problème est qu'on travaille à gauche de zéro (l'intervalle d'intégration ne contient que des nombres négatifs). Pour se ramener à un cadre plus confortable, on commence par poser $t = -s$

$$\int_0^{y(x)} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2 - 4u + 3}} = \int_{-2}^{y(x)-2} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2 - 1}} = \int_{2-y(x)}^{2} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2 - 1}}.$$

Maintenant, on intègre comme d'habitude et on obtient

$$\text{Argch}\,(2) - \text{Argch}(2 - y(x)) = x \Rightarrow \text{Argch}(2 - y(x)) = \text{Argch}\,(2) - x \Rightarrow y(x) = 2 - \text{ch}(\text{Argch}\,(2) - x)$$

(Ici, on pourrait avoir envie de définir y sur $\mathbf{R}$ tout entier. Effectivement, l'expression ci-dessus $2 - \text{ch}(\text{Argch}\,(2) - x)$ a bien un sens (et est dérivable) pour tout x réel. Mais notre analyse préliminaire suggérait des problèmes possibles quand y tendait vers 1 donc ici quand x tend vers $\text{Argch}\,(2)$. Nous allons prudemment d'abord définir la solution là où il n'y a pas de problème ($y < 1$), et verrons ensuite comment prolonger.)

La solution $y_1 : x \mapsto 2 - \text{ch}(\text{Argch}\,(2) - x)$ (qui est bien une solution au problème de Cauchy posé) définie pour x dans $]-\infty, \text{Argch}\,(2)\,[$ est localement unique, dans le sens où elle coïncide avec la restriction à $]-\infty, \text{Argch}\,(2)\,[$ de n'importe quelle autre solution de $y'(x) = \sqrt{y^2(x) - 4y(x) + 31}$ vérifiant $y(0) = 0$.

On peut prolonger cette solution y_1 en une solution y_2 définie sur $\mathbf{R}$ par

$$\begin{array}{rcrcl} y_2(x) & = & 2 - \text{ch}(\text{Argch}\,(2) - x) & \text{si} & x < \text{Argch}\,(2) \\ y_2(x) & = & 1 & \text{si} & x \geq \text{Argch}\,(2) \end{array}$$

La fonction y_2 est bien solution du problème de Cauchy, et maximale car définie sur $\mathbf{R}$. Comme toutes les solutions de $y'(x) = \sqrt{y^2(x) - 4y(x) + 3}$ sont croissantes (regarder le signe de y') et à valeurs dans $]-\infty, 1]$ (pour que l'équation ait un sens et par continuité des solutions), y_2 est le seul prolongement possible à $\mathbf{R}$ de y_1.

En conclusion, il existe une unique solution maximale à $y'(x) = \sqrt{y^2(x) - 4y(x) + 3}$ vérifiant $y(0) = 0$, et c'est la fonction y_2 donnée ci-dessus. Toutes les autres solutions étant des restrictions de cette solution y_2.

Exercice 17 (20 points) On reconnaît une équation à variables séparables, qui a un sens pour toute valeur de y. La fonction $F : u \mapsto \sqrt{1 - \cos(u)}$ est définie sur $\mathbf{R}$. En se souvenant que pour tout u réel,

$$\cos(u) = \cos\left(2\frac{u}{2}\right) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{u}{2}\right),$$

on peut réécrire $F(u) = \sqrt{2}\left|\sin\left(\frac{u}{2}\right)\right|$ pour tout u réel. La fonction F est clairement C^1 sur $\mathbf{R} \setminus \bigcup\limits_{k\in\mathbf{Z}}\{2k\pi\}$. Même si F n'est pas dérivable dans les points de $\bigcup_{k\in\mathbf{Z}}\{2k\pi\}$, elle est localement lipschitzienne (continue, dérivable à dérivée bornée partout sauf en un point au voisinage de $2k\pi$). Le théorème de Cauchy-Lipschitz garantit l'existence et l'unicité de la solutions maximale au problème de Cauchy posé.

On va chercher un candidat solution sans se soucier de justifier rigoureusement les calculs dans un premier temps.

$$y'(x) = \sqrt{1 - \cos(y(x))} \Rightarrow \frac{y'(x)}{\sqrt{1 - \cos(y(x))}} = 1 \Rightarrow \int_{\frac{\pi}{3}}^{y(x)} \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{1 - \cos(s)}} = x$$

Comme on s'intéresse aux solutions avec $y(0) = \frac{\pi}{3}$, donc avec $\sin(y(x)) > 0$, on trouve (au moins pour s proche $\frac{\pi}{3}$) :

$$\sqrt{1 - \cos(s)} = \sqrt{2}\left|\sin\left(\frac{s}{2}\right)\right| = \sqrt{2}\sin\left(\frac{s}{2}\right),$$

et l'intégrale devient, avec le changement de variable $v = \frac{s}{2}$:

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{y(x)} \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{1 - \cos(s)}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\frac{\pi}{3}}^{y(x)} \frac{\mathrm{d}s}{\sin\left(\frac{s}{2}\right)} = \sqrt{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{y(x)}{2}} \frac{\mathrm{d}v}{\sin\,(v)}.$$

Les règles de Bioche suggèrent le changement de variable $w = \cos(v)$, et on obtient

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{y(x)} \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{1-\cos(s)}} = \sqrt{2}\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\cos(\frac{y(x)}{2})} \frac{-\mathrm{d}w}{1-w^2} = \sqrt{2}\,[\mathrm{Argth}(w)]_{\cos(\frac{y(x)}{2})}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}.$$

En revenant à l'équation de départ :

$$\mathrm{Argth}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \mathrm{Argth}\left(\cos\left(\frac{y(x)}{2}\right)\right) = \frac{x}{\sqrt{2}} \Rightarrow \cos\left(\frac{y(x)}{2}\right) = \mathrm{th}\left(\mathrm{Argth}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$

Pour $\frac{y(x)}{2}$ au voisinage de $\frac{\pi}{6}$, on trouve

$$y(x) = 2\,\mathrm{Arccos}\left(\mathrm{th}\left(\mathrm{Argth}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right)$$

On vérifie facilement que l'expression donnée ci-dessus définit une fonction dérivable sur $\mathbf{R}$ et $y(0) = \frac{\pi}{3}$. Pour vérifier que cette fonction est bien solution du problème de Cauchy posé, on peut soit calculer sa dérivée (c'est possible mais pénible), soit reprendre nos calculs dans l'ordre inverse. Cette fois, connaissant l'expression, on peut justifier chaque étape (en particulier garantir la positivité de $\sin(y(x)/2)$) et on obtient directement $y' = \sqrt{1-\cos(y)}$. Comme on peut appliquer le théorème de Cauchy Lipschitz en chaque point de la trajectoire trouvée, on en déduit que la fonction

$$\begin{array}{rccl} y: & \mathbf{R} & \to & \mathbf{R} \\ & x & \mapsto & 2\,\mathrm{Arccos}\left(\mathrm{th}\left(\mathrm{Argth}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right) \end{array}$$

est l'unique solution maximale au problème de Cauchy posé. Toutes les autres solutions sont des restrictions de y.

Exercice 18 (20 points)

Commençons par chercher d'éventuelles solutions constantes.

$$\sin(e^{u^2}) = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbf{Z} | e^{u^2} = k\pi \Leftrightarrow \exists k \in \mathbf{N}, k \geq 1 | e^{u^2} = k\pi \Leftrightarrow \exists k \in \mathbf{N}, k \geq 1 | u^2 = \ln(k\pi)$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbf{N}, k \geq 1 | u = \pm\sqrt{\ln(k\pi)}$$

Nous venons de trouver une suite de fonctions constantes solutions (maximales car définies sur $\mathbf{R}$) de l'équation différentielle ordinaire $y'(x) = \sin(e^{y^2(x)})$.
Remarquons que $\lim_{k\to+\infty} \sqrt{\ln(k\pi)} = +\infty$, donc pour tout y_0 de $\mathbf{R}$, il existe deux solutions constantes $x \mapsto u_m$ et $x \mapsto u_M$ de $y'(x) = \sin(e^{y^2(x)})$ telles que $u_m \leq y_0 \leq u_M$.
La fonctions $u \mapsto \sin(e^{u^2})$ est C^1 sur $\mathbf{R}$, donc localement lipschitzienne. Le théorème de Cauchy-Lipschitz permet maintenant de garantir que si deux solutions y_1 et y_2 de $y'(x) = \sin(e^{y^2(x)})$ coïncident en un point ($y_1(x_0) = y_2(x_0)$) alors elles coïncident sur l'intersection de leurs domaines de définition.
Soit y une solution de $y'(x) = \sin(e^{y^2(x)})$, définie dans un intervalle qui contient un voisinage de x_0. Alors il existe deux solutions constantes $x \mapsto u_m$ et $x \mapsto u_M$ de $y'(x) = \sin(e^{y^2(x)})$ telles que $u_m \leq y_0 = y(x_0) \leq u_M$. Par le principe de non intersection évoqué précédemment, on a donc $u_m \leq y(x) \leq u_M$ pour tout x où y est définie. En conséquence, y est bornée.
Conclusion : oui, toutes toutes les solutions (donc aussi les solutions maximales) de l'équation différentielle ordinaire $y'(x) = \sin(e^{y^2(x)})$ sont bornées.