PeiP IAD/Polytech Dijon
Premiére année
Durée : 70 minutes

29 janvier 2025
Documents interdits sauf
une feuille A4 manuscrite
Calculatrices interdites

ANALYSE 1

L'épreuve est notée sur 20, le sujet comporte 18 exercices. Le candidat choisira un ou plusieurs exercices pour un total inférieur ou égal à 20 points. **Toutes les réponses doivent être justifiées.**

Exercice 1 (2 points) Quels sont les réels x tels que $|x+2| \leq 1 + |x-3|$?

Exercice 2 (2 points) Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^3(x)\sin(x)\mathrm{d}x$.

Exercice 3 (2 points) Calculer $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin(x)}\mathrm{d}x$.

Exercice 4 (2 points) Peut-on trouver un réel a et un entier n tels que $\mathrm{Argch}(x^2) - \mathrm{th}(x^2)$ soit équivalent à ax^n quand x tend vers 0 ?

Exercice 5 (2 points) Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\tan(x^3)} - \frac{1}{\mathrm{Arctan}(x^3)}$.

Exercice 6 (4 points) Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x+x^2}}\mathrm{d}x$.

Exercice 7 (4 points) Montrer que pour tout entier n, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=0}^{n} k\right)^2$.

Exercice 8 (4 points) Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{1+\cos(t)}$.

Exercice 9 (4 points) Quelles sont les fonctions dérivables $y : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ telles que $y(0) = 0$ et, pour tout x de $\mathbf{R}$, $y'(x) = \cos(x)y(x) - \cos(x)$?

Exercice 10 (4 points) Quelles sont les fonctions deux fois dérivables $y : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ telles que $y(0) = y'(0) = 1$ et, pour tout x de $\mathbf{R}$, $y''(x) + y(x) = \cos(x)$?

Exercice 11 (6 points) Que vaut $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}$?

Exercice 12 (6 points) Quelles sont les fonctions dérivables y à valeurs dans $\mathbf{R}$ telles que $y(0) = 0$ et, pour tout x de leur ensemble de définition, $y'(x) = \sqrt{y(x)^2 + 1}$? Quel est leur intervalle de définition maximal ?

Exercice 13 (10 points) Quelles sont les fonctions dérivables y à valeurs dans $\mathbf{R}$ telles que $y(0) = 0$ et, pour tout x de leur ensemble de définition, $y'(x) = 1 + \sin(y(x))$? Quel est leur intervalle de définition maximal ?

Exercice 14 (10 points) Quelles sont les fonctions dérivables y à valeurs dans $\mathbf{R}$ telles que $y(0) = 0$ et, pour tout x de leur ensemble de définition, $y'(x) = 5 - 6y(x) + y(x)^2$? Quel est leur intervalle de définition maximal ?

Exercice 15 (10 points)
Quelles sont les fonctions dérivables y à valeurs dans $\mathbf{R}$ telles que $y(0) = 0$ et, pour tout x de leur ensemble de définition, $y'(x) = \sqrt{y^2(x) + y(x) + 1}$? Quel est leur intervalle de définition maximal ?

Exercice 16 (10 points)
Quelles sont les fonctions dérivables y à valeurs dans $\mathbf{R}$ telles que $y(0) = 0$ et, pour tout x de leur ensemble de définition, $y'(x) = \sqrt{y^2(x) - 4y(x) + 3}$? Quel est leur intervalle de définition maximal ?

Exercice 17 (20 points) Quelles sont les fonctions dérivables y à valeurs dans $\mathbf{R}$ telles que $y(0) = \frac{\pi}{3}$ et, pour tout x de leur ensemble de définition, $y'(x) = \sqrt{1 - \cos(y(x))}$? Quel est leur intervalle de définition maximal ?

Exercice 18 (20 points) Est-ce que toutes les solutions maximales de l'équation différentielle ordinaire $y'(x) = \sin(e^{y^2(x)})$ sont bornées ?