Corrigé DM1 : loi hypergéométrique

La loi hypergéométrique permet de modéliser la situation suivante : on a une urne avec N_1 boules blanches et $N - N_1$ boules noires (donc N boules au total), et on tire n boules de cette urne, sans remise. Le nombre de boules blanches tirées suit alors la **loi hypergéométrique** $\mathcal{H}(n, N, N_1)$.
Les calculs avec le tableur sont détaillés dans un fichier annexe.

Exercice 1. Machines à voter. Dans un état américain, on soupçonne un bug sur des machines à voter. On décide d'examiner très attentivement 30 machines, tirées au hasard, sur les 1000 machines utilisées dans l'état. Si le bug touche 50 machines en tout, quelle est la probabilité qu'aucune des 30 machines examinées ne soit touchée ? Même question si le bug touche 30 machines en tout.

Solution de l'exercice 1.
Le nombre X de machines examinées souffrant du bug suit une loi hypergéométrique. Il s'agit d'un tirage sans remise, donc si le bug touche 50 machines en tout, X suit la loi $\mathcal{H}(30, 1000, 50)$. On trouve avec un tableur

$$\mathbb{P}(X = 0) \approx 20.9\%$$

Si le bug touche 30 machines en tout, X suit la loi $\mathcal{H}(30, 1000, 30)$. On trouve avec un tableur

$$\mathbb{P}(X = 0) \approx 39.6\%$$

Exercice 2. Poker. On joue au poker Texas Hold Them, une variante du poker qui se joue avec un jeu de 52 cartes où chaque joueur reçoit deux cartes. Trois cartes sont étalées faces visibles sur la table. Après un cycle d'enchères, on va retourner deux cartes supplémentaires. Le but pour chaque joueur est de former des combinaisons avec ses deux cartes et jusqu'à trois cartes parmi les cinq étalées sur la table.

1. J'ai reçu deux rois (trèfle et pique), le croupier a pour l'instant retourné trois cartes (le roi de cœur, le sept de pique et l'as de carreau). Quelle est la probabilité que j'arrive à obtenir un carré de rois avec les deux cartes non encore découvertes ?
2. Dans une autre partie, j'ai reçu deux trèfles (le 7 et le 3), et le croupier a pour l'instant retourné le 10 de trèfle, le 2 de pique et le 4 de cœur. Quelle est la probabilité que j'arrive à obtenir une couleur (5 cartes à trèfles) avec les deux cartes restant à retourner ?

Solution de l'exercice 2.

1. On note X le nombre de rois sous les deux cartes restantes, qui est 0 ou 1 car il ne reste qu'un roi. X suit une loi hypergéométrique $\mathcal{H}(1, 47, 1)$. Avec un tableur, on trouve
$$\mathbb{P}(X = 2) \approx 4,26\%$$

2. On note Y le nombre de trèfles sous les deux cartes restantes. Il reste 10 trèfles au total, et pour gagner il faut obtenir exactement 2 trèfles supplémentaires. Le tirage est sans remise, X suit donc une loi hypergéométrique $\mathcal{H}(2, 47, 10)$. Avec un tableur, on trouve
$$\mathbb{P}(Y = 2) \approx 4,16\%$$

Exercice 3. Quand la population est grande. En 2023, d'après l'INSEE la France compte environ 27.4 millions de femmes adultes et 24.7 millions d'hommes adultes. On choisit au hasard 50 personnes françaises adultes. Quelle est la probabilité de choisir strictement plus de 28 hommes ?

Solution de l'exercice 3. On note X le nombre d'hommes parmi les 50 personnes. X suit une loi hypergéométrique $\mathcal{H}(50; 52.1 \cdot 10^6; 24.7 \cdot 10^6)$.
En utilisant la loi hypergéométrique via la formule habituelle, on trouve un erreur (les nombres sont trop grands). Mais en utilisant directement les fonctions intégrées à un tableur (ou à R par exemple), on obtient

$$\mathbb{P}(X > 28) = 1 - \mathbb{P}(X \leqslant 28) \approx 8,72\%$$

On pouvait aussi modéliser ceci avec une loi binomiale de paramètre $p = 24,7/52,1$ et $n = 50$ (vu qu'en plus la population n'est donnée que sous forme approximative). On trouve alors environ $8,71\%$.