

OUTILS MATHÉMATIQUES I

Exercice 1 (12 points)

1) Notons F_λ la fonction de répartition d'une variable de loi $\mathcal{E}(\lambda)$. On repart de la définition d'une fonction de répartition. Soit x dans $\mathbf{R}$. Si $x < 0$, $F_\lambda(x) = 0$. Sinon, si $x > 0$,

$$F_\lambda(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = [-e^{-\lambda t}]_0^x = 1 - e^{-\lambda x}$$

En conclusion, en notant F_X la fonction de répartition de X , $F_X(x) = 0$ si $x \leq 0$ et $F_X(x) = 1 - e^{-x}$ si $x > 0$.

2) On peut savoir (on l'a vu en CM et partiellement répété en TD) qu'une loi exponentielle de paramètre λ a pour espérance $\frac{1}{\lambda}$ et pour variance $\frac{1}{\lambda^2}$. Si on le sait pas, les espérances de X et Y peuvent se calculer directement avec la formule de définition. On procède par intégration par partie après avoir vérifié que toutes les intégrales écrites convergent.

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{+\infty} x e^{-x} dx = [-x e^{-x}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = [-e^{-x}]_0^{+\infty} = 1$$

$$\mathbb{E}(Y) = \int_0^{+\infty} 2x e^{-2x} dx = [-x e^{-2x}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-2x} dx = \left[-\frac{1}{2} e^{-2x}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2}$$

Pour l'espérance de Z , on utilise la linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

3) Exactement comme pour la question 2, on utilise une intégration par partie pour calculer les espérances de X^2 et Y^2 (en ayant bien pris soin de vérifier que toutes les intégrales écrites convergent).

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx = [-x^2 e^{-x}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} 2x e^{-x} dx = 2\mathbb{E}(X) = 2$$

$$\mathbb{E}(Y^2) = \int_0^{+\infty} 2x^2 e^{-2x} dx = [-x^2 e^{-2x}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} 2x e^{-2x} dx = \mathbb{E}(Y) = \frac{1}{2}$$

On en déduit

$$V(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = 2 - 1 = 1$$

$$V(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - (\mathbb{E}(Y))^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$

Enfin, comme X et Y sont indépendantes,

$$V(Z) = V(X + Y) = V(X) + V(Y) = \frac{5}{4}$$

4) On réutilise la fonction de répartition calculée dans la question 1.

$$\mathbb{P}(X \geq a) = 1 - F_X(a) = e^{-a}$$

5) En reprenant le calcul de la question 4 avec $a+1$ au lieu de a , on trouve $\mathbb{P}(X \geq a+1) = e^{-a-1}$.
On utilise ensuite la définition des probabilités conditionnelles

$$\mathbb{P}(X \geq a+1 | X \geq a) = \frac{\mathbb{P}(X \geq a+1 \cap X \geq a)}{\mathbb{P}(X \geq a)} = \frac{\mathbb{P}(X \geq a+1)}{\mathbb{P}(X \geq a)} = \frac{e^{-a-1}}{e^{-a}} = e^{-1}$$

(Les lois exponentielles sont souvent utilisées pour modéliser des durées de vie. La probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(X \geq a+1 | X \geq a)$ est dans ce contexte la probabilité de vivre une unité de temps de plus sachant qu'on a déjà vécu a . Cette probabilité ne dépend pas de a : on parle de loi sans usure - contrairement à une situation où la probabilité de survie un jour de plus diminue avec l'usure accumulée.)

6)

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z \leq 2) &= \int_{x=0}^2 \int_{y=0}^{2-x} 2e^{-x} e^{-2y} dy dx = \int_{x=0}^2 e^{-x} [-e^{-2y}]_0^{2-x} dx = \int_{x=0}^2 e^{-x} (1 - e^{-4+2x}) dx \\ &= \int_{x=0}^2 e^{-x} dx - \int_{x=0}^2 e^{-4+x} dx = [-e^{-x}]_0^2 - [e^{x-4}]_0^2 = 1 - e^{-2} - (e^{-2} - e^{-4}) = (1 - e^{-2})^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z \leq 3) &= \int_{x=0}^3 \int_{y=0}^{3-x} 2e^{-x} e^{-2y} dy dx = \int_{x=0}^3 e^{-x} [-e^{-2y}]_0^{3-x} dx = \int_{x=0}^3 e^{-x} (1 - e^{-6+2x}) dx \\ &= \int_{x=0}^3 e^{-x} dx - \int_{x=0}^3 e^{-6+x} dx = [-e^{-x}]_0^3 - [e^{x-6}]_0^3 = 1 - e^{-3} - (e^{-3} - e^{-6}) = (1 - e^{-3})^2 \end{aligned}$$

7)

$$\mathbb{P}(2 \leq Z \leq 3) = \mathbb{P}(Z \leq 3) - \mathbb{P}(Z \leq 2) = (1 - e^{-3})^2 - (1 - e^{-2})^2 = (2 - e^{-3} - e^{-2})(e^{-2} - e^{-3})$$

8) On va utiliser la définition des probabilités conditionnelles

$$\mathbb{P}(X \geq 1 | Z \geq 2) = \frac{\mathbb{P}(X \geq 1 \cap Z \geq 2)}{\mathbb{P}(Z \geq 2)}$$

Le calcul du dénominateur a déjà été fait en question 6,

$$\mathbb{P}(Z \geq 2) = 1 - \mathbb{P}(Z \leq 2) = 1 - (1 - e^{-2})^2 \approx 25.24\%$$

il reste à calculer le numérateur. Le domaine d'intégration a des bords parallèles aux axes, sauf un bout de coin en bas à gauche (voir dessin). Il y a essentiellement deux méthodes : on découpe

le domaine d'intégration en deux morceaux ou on calcule séparément la probabilité « du coin en bas à gauche » et on passe au complémentaire dans $\{X \geq 1\}$. Dans un but didactique, on va traiter les deux méthodes :

Méthode 1 : découpage du domaine d'intégration

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(X \geq 1 \cap Z \geq 2) &= \int_{x=1}^2 \int_{y=2-x}^{+\infty} 2e^{-x}e^{-2y} dx dy + \int_{x=2}^{+\infty} \int_{y=0}^{+\infty} 2e^{-x}e^{-2y} dx dy \\
 &= \int_{x=1}^2 e^{-x} [-e^{-2y}]_{y=2-x}^{+\infty} dx + [-e^{-x}]_{x=2}^{+\infty} [-e^{-2y}]_{y=0}^{+\infty} \\
 &= \int_{x=1}^2 e^{x-4} dx + e^{-2} \\
 &= 2e^{-2} - e^{-3} \approx 22.09\%
 \end{aligned}$$

Méthode 2 : passage au complémentaire

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(X \geq 1 \cap Z \leq 2) &= \int_{x=1}^2 \int_{y=0}^{2-x} 2e^{-x}e^{-2y} dx dy \\
 &= \int_{x=1}^2 e^{-x} [-e^{-2y}]_{y=0}^{2-x} dx \\
 &= \int_{x=1}^2 e^{-x}(1 - e^{2x-4}) dx \\
 &= \int_{x=1}^2 (e^{-x} - e^{x-4}) dx \\
 &= [-e^{-x} - e^{x-4}]_{x=1}^2 \\
 &= e^{-1} + e^{-3} - 2e^{-2}
 \end{aligned}$$

Il suffit maintenant d'écrire

$$\mathbb{P}(X \geq 1 \cap Z \geq 2) + \mathbb{P}(X \geq 1 \cap Z \leq 2) = \mathbb{P}(X \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 1)$$

Donc, en utilisant le résultat de la question 1,

$$\mathbb{P}(X \geq 1 \cap Z \geq 2) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 1) - \mathbb{P}(X \geq 1 \cap Z \leq 2) = 1 - (1 - e^{-1}) - (e^{-1} + e^{-3} - 2e^{-2}) = -e^{-3} + 2e^{-2}$$

On retrouve sans surprise le même résultat qu'avec la première méthode.

On déduit du calcul de $\mathbb{P}(X \geq 1 \cap Z \geq 2)$ la probabilité conditionnelle cherchée

$$\mathbb{P}(X \geq 1 | Z \geq 2) = \frac{2e^{-2} - e^{-3}}{1 - (1 - e^{-2})^2} \approx 87.53\%$$

9) On va utiliser la définition des probabilités conditionnelles

$$\mathbb{P}(Z \geq 2 | X \geq 1) = \frac{\mathbb{P}(X \geq 1 \cap Z \geq 2)}{\mathbb{P}(X \geq 1)}.$$

Le calcul du numérateur a été effectué en question 8. Le calcul du dénominateur se fait à partir de la fonction de répartition de X calculée en question 1.

$$\mathbb{P}(X \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 1) = 1 - (1 - e^{-1}) = e^{-1}$$

En conclusion,

$$\mathbb{P}(Z \geq 2 | X \geq 1) = \frac{2e^{-2} - e^{-3}}{e^{-1}} = \frac{2e - 1}{e^2} \approx 60.04\%$$

Exercice 2 (4 points)

1) (1 point) Notons X la durée de vie d'un disque donné. La loi de X est $\mathcal{E}(\frac{1}{5})$.

$$\mathbb{P}(X \leq 4) = \int_0^4 \frac{1}{5} e^{-\frac{1}{5}x} dx = \left[e^{-\frac{1}{5}x} \right]_{x=0}^4 = 1 - e^{-\frac{4}{5}} \approx 55\%$$

2) (3 points) Notons Y le nombre de disque en fonctionnement au bout de quatre ans. Chacun des n disques a une probabilité $p_0 = \mathbb{P}(X \geq 4) = e^{-\frac{4}{5}}$ de fonctionner encore au bout de quatre ans. Comme les disques sont indépendants, Y suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p_0)$. Le but de la question est de trouver n (le plus petit possible) tel que $\mathbb{P}(Y \geq 2) \geq 99\%$, ou de manière équivalente $\mathbb{P}(Y \leq 1) = \mathbb{P}(Y = 0) + \mathbb{P}(Y = 1) \leq 1\%$. On calcule en utilisant les formules habituelles pour les lois binomiales et le résultat de la question 1 pour $1 - p_0$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y = 0) &= (1 - p_0)^n = (1 - e^{-\frac{4}{5}})^n \\ \mathbb{P}(Y = 1) &= n(1 - p_0)^{n-1} p_0 = n(1 - e^{-\frac{4}{5}})^{n-1} e^{-\frac{4}{5}} \end{aligned}$$

Pour la recherche effective de n , on va procéder par dichotomie : quand n augmente, les probabilités $\mathbb{P}(Y = 0)$ et $\mathbb{P}(Y = 1)$ diminuent. On va chercher un n trop grand, puis diviser les intervalles par deux jusqu'à trouver la bonne valeur.

Pour plus de lisibilité, on a consigné les résultats (arrondis à 10^{-3}) dans la Table 1. Le résultat final est $n = 12$.

n	10	20	15	13	12	11
$\mathbb{P}(Y = 0)$	0.003	$< 10^{-3}$	$< 10^{-3}$	$< 10^{-3}$	0.001	0.001
$\mathbb{P}(Y = 1)$	0.021	$< 10^{-3}$	0.002	0.005	0.008	0.013
$\mathbb{P}(Y < 2)$	0.023	$< 10^{-3}$	0.002	0.005	0.008	0.014

TABLE 1 – Recherche du n minimal dans l'exercice 2. On commence par calculer la première colonne en choisissant au hasard $n = 10$. On constate que $\mathbb{P}(Y < 2)$ est trop grand, donc n est trop petit. On essaye avec $n = 20$ (doubler à chaque étape est une stratégie usuelle pour trouver un n assez grand). La deuxième colonne nous indique que $n = 20$ permet d'atteindre la condition $\mathbb{P}(Y < 2) \leq 1\%$ mais est peut-être trop grand. On essaye avec $n = \frac{10+20}{2} = 15$ (troisième colonne) qui vérifie encore $\mathbb{P}(Y < 2) \leq 1\%$ (ce qui garantit que $n = 20$ était trop grand). Il faudrait maintenant essayer avec $n = 12.5$ (le milieu de $[10, 15]$) mais n doit être entier, donc on essaye avec $n = 13$ (quatrième colonne), qui montre que $n = 15$ est encore trop grand. On continue avec $n = 12$, puis avec $n = 11$. Au final, la valeur retenue est $n = 12$.

Exercice 3 (4 points)

On tire sans remise 500 personnes parmi 25 000, dont 11 000 marqués : le nombre X d'hommes tirés au sort suit une loi hypergéométrique $\mathcal{H}(500; 25000; 11000)$. Si on dispose d'une calculatrice sophistiquée ou d'un tableur, on peut calculer directement

$$\mathbb{P}(X \leq 230) \approx 0,8303 \quad \mathbb{P}(X \leq 199) \approx 0,0307 \quad \mathbb{P}(200 \leq X \leq 230) \approx 0.7997.$$

Comme le nombre de personnes tirées (500) est très inférieur à la population totale (25000), on peut assez bien approcher X par une variable Y qui suit une loi binomiale $\mathcal{B}\left(500, \frac{11}{25}\right)$. (Le critère donné dans le cours pour justifier l'approximation est de tirer moins de 10 % de la population, on en tire ici 4.5 %.) Si on dispose d'une calculatrice sophistiquée, on peut faire un calcul direct avec la loi binomiale (mais dans ce cas, on pourrait certainement faire aussi le calcul direct avec la loi hypergéométrique et la démarche est pour le moins curieuse), on peut calculer

$$\mathbb{P}(Y \leq 230) \approx 0,8280 \quad \mathbb{P}(Y \leq 199) \approx 0,0320 \quad \mathbb{P}(200 \leq Y \leq 230) \approx 0.7960$$

La variable Y suit une loi binomiale $\mathcal{B}\left(500, \frac{11}{25}\right)$, donc avec les notations habituelles du cours, une loi $\mathcal{B}(n, p)$ avec $n = 500$ et $p = \frac{11}{25}$. On peut calculer $np = 220 \gg 5$ et $n(1-p) = 280 \gg 5$, donc on pourra très bien approcher la loi de Y par une loi normale de même espérance (220) et de même variance $np(1-p) = 123.2$ que Y . Soit donc Z de loi $\mathcal{N}(220; 123.2)$. On note F la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(200 \leq Y \leq 230) &\approx \mathbb{P}(199.5 \leq Z \leq 230.5) \\ &\approx \mathbb{P}\left(\frac{199.5 - 220}{\sqrt{123.2}} \leq \frac{Z - 220}{\sqrt{123.2}} \leq \frac{230.5 - 220}{\sqrt{123.2}}\right) \\ &\approx \mathbb{P}\left(-1.85 \leq \frac{Z - 220}{\sqrt{123.2}} \leq 0.95\right) \\ &\approx F(0.95) - F(1.85) = F(0.95) + F(1.85) - 1 \approx 79\% \end{aligned}$$

Exercice 4 (4 points)

On note X le nombre de têtes dans les 26 cartes tirées. X suit une loi hypergéométrique.

$$\mathbb{P}(X = 12) = \frac{C_{12}^{12} C_{14}^{14}}{C_{26}^{26}} = \frac{1 \cdot \frac{40!}{14! \cdot 26!}}{\frac{52!}{26! \cdot 26!}}$$

Le calcul n'est pas forcément très facile avec une calculatrice de poche et on peut simplifier un

peu l'expression

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(X = 12) &= \frac{(40!) \cdot (26!) \cdot (26!)}{(14!) \cdot (26!) \cdot (52!)} = \frac{26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15}{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44 \cdot 43 \cdot 42 \cdot 41} \\
 &= \frac{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15}{2 \cdot 51 \cdot 2 \cdot 49 \cdot 2 \cdot 47 \cdot 2 \cdot 45 \cdot 2 \cdot 43 \cdot 42 \cdot 41} \\
 &= \frac{21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 15}{51 \cdot 49 \cdot 47 \cdot 45 \cdot 2 \cdot 43 \cdot 42 \cdot 41} \\
 &= \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{3 \cdot 49 \cdot 47 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 43 \cdot 2 \cdot 41} \\
 &= \frac{20 \cdot 19}{49 \cdot 47 \cdot 43 \cdot 2 \cdot 41} = \frac{10 \cdot 19}{49 \cdot 47 \cdot 43 \cdot 41} = \frac{190}{4060189} \approx 4.7 \cdot 10^{-5}
 \end{aligned}$$

Exercice 5 (4 points)

1) Si il a fallu k lancers pour obtenir « face », on a tiré $k - 1$ fois « pile » (probabilité $1 - p$) et une fois « face » (probabilité p).

2) On sait que pour $|x| < 1$, $\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$. Écrivons, de manière purement formelle dans un premier temps,

$$\Phi(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} p(1-p)^{k-1} t^k = \frac{p}{1-p} \sum_{k=1}^{+\infty} (1-p)^k t^k = \frac{p}{1-p} \sum_{k=1}^{+\infty} ((1-p)t)^k = \frac{p}{1-p} \left(-1 + \sum_{k=0}^{+\infty} ((1-p)t)^k \right)$$

L'écriture formelle ci-dessus est parfaitement rigoureuse si la série considérée converge. On a reconnu une série géométrique (voir rappel en début de correction), qui converge si $|(1-p)t| < 1$. Dans ce cas,

$$\Phi(t) = \frac{p}{1-p} \left(\frac{1}{1 - (1-p)t} - 1 \right) = \frac{p}{1-p} \frac{1 - 1 + (1-p)t}{1 - (1-p)t} = \frac{p}{1-p} \frac{(1-p)t}{1 - (1-p)t} = \frac{pt}{1 - (1-p)t}.$$

3) Comme $1 < \frac{1}{1-p}$, $\Phi(1)$ est bien défini et la formule ci-dessus est valable.

$$\Phi(1) = \frac{p}{1 - (1-p)} = \frac{p}{p} = 1.$$

C'est un résultat attendu puisque $\Phi(1) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k)$ et que X prend toutes ses valeurs dans $\mathbf{N} \setminus \{0\}$.

4) Pour $|t| < \frac{1}{1-p}$, Φ est dérivable en t de dérivée

$$\Phi'(t) = \frac{p(1 - (1-p)t) + pt(1-p)}{(1 - (1-p)t)^2}.$$

On trouve en particulier

$$\Phi'(1) = \frac{p(1 - (1-p)) + p(1-p)}{p^2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}.$$

Comme $\Phi'(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\mathbb{P}(X = k)t^{k-1}$ pour $|t| < \frac{1}{1-p}$, on trouve

$$\Phi'(1) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{E}(X).$$

Finalement, $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$. (Il faut attendre en moyenne $\frac{1}{p}$ lancers pour obtenir la première « face ».)

Exercice 6 (4 points)

Notons F_X et F_Y les fonctions de répartition de X et Y . Pour tout $x \geq 0$,

$$F_X(x) = \int_0^x e^{-s} ds = [-e^{-s}]_0^x = 1 - e^{-x}$$

Comme $F_X(x) = 0$ si $x \leq 0$, on en déduit

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Soit y dans $\mathbf{R}$. Comme Y est à valeurs dans $[0, +\infty[$, $F_Y(y) = 0$ si $y < 0$.
Si $y \geq 0$,

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(X^4 \leq y) \\ &= \mathbb{P}(-\sqrt[4]{y} \leq X \leq \sqrt[4]{y}) \\ &= F_X(\sqrt[4]{y}) - F_X(-\sqrt[4]{y}) = F_X(\sqrt[4]{y}) \\ &= 1 - e^{-\sqrt[4]{y}} \end{aligned}$$

La fonction F_Y est dérivable sur $\mathbf{R}$ sauf en zéro de dérivée la densité f_Y de Y . Pour $y < 0$, $f_Y(y) = 0$.

Pour $y > 0$,

$$f_Y(y) = e^{-\sqrt[4]{y}} \frac{1}{4} y^{-\frac{3}{4}}$$

Le graphe de f_Y est représenté sur la Figure 1.

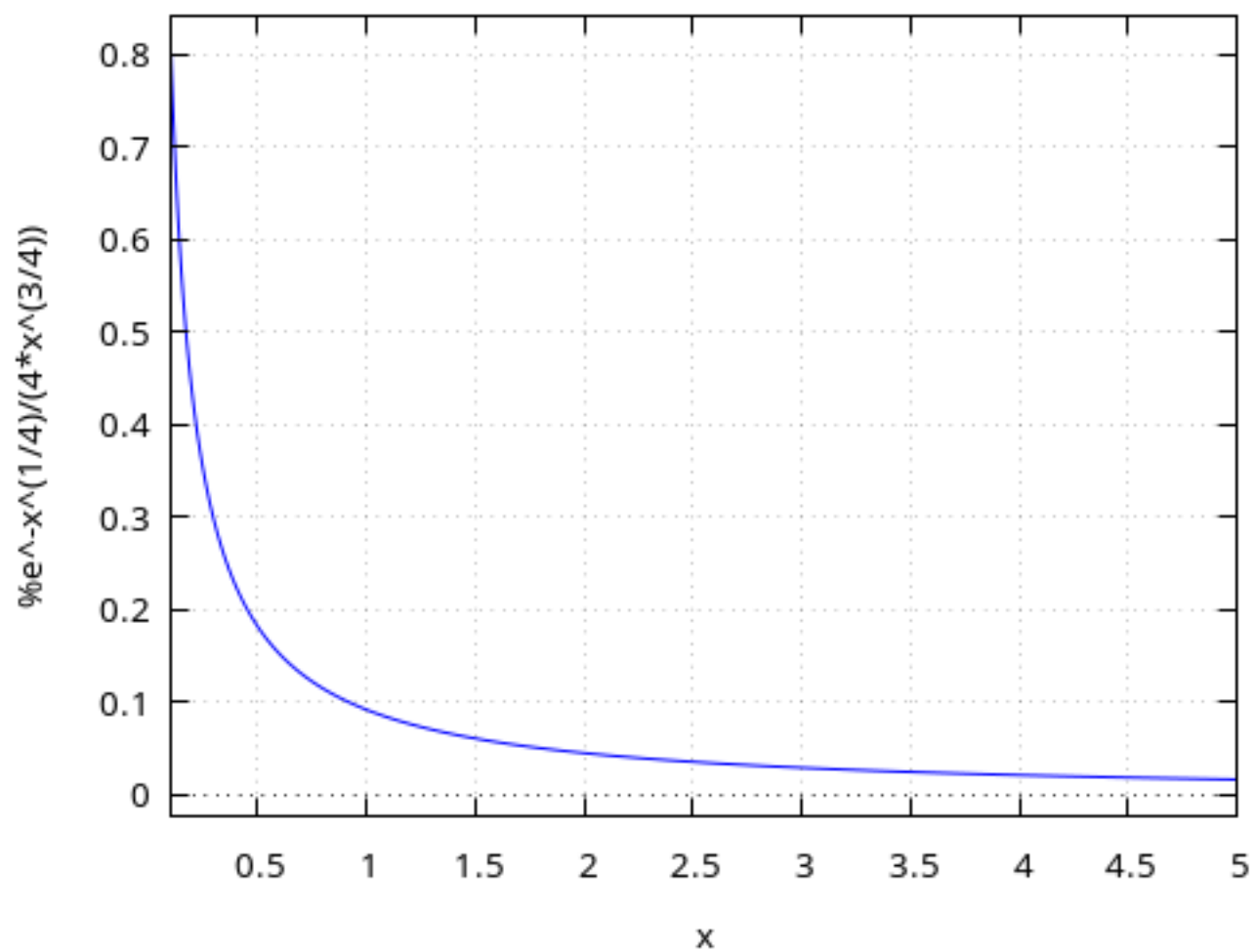


FIGURE 1 – Graphe de la densité de la variable aléatoire réelle Y (exercice 6).