Polytech Dijon — **16 octobre 2024**
3A MDD - S5 — **Documents autorisés**
Durée : 90 minutes — **Calculatrices autorisées**

OUTILS MATHÉMATIQUES

Le candidat traitera l'exercice 1 et **deux** exercices au choix parmi les exercices 2, 3, 4, 5 et 6. Toutes les réponses (et en particulier les éventuelles approximations) doivent être justifiées.

Exercice 1 (12 points)
On rappelle que, pour $\lambda > 0$, la densité de la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ est

$$f_\lambda : \begin{array}{ccll} \mathbf{R} & \to & \mathbf{R} & \\ x & \mapsto & 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \mapsto & \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{array}$$

On suppose que X et Y sont deux variables aléatoires réelles indépendantes de lois $\mathcal{E}(1)$ et $\mathcal{E}(2)$ respectivement. On note $Z = X + Y$.

1. Quelle est la fonction de répartition de X ?
2. Que valent, si elles existent, les espérances de X, Y et Z ?
3. Calculer les variances de X, Y et Z.
4. Soit $a > 0$. Calculer $\mathbb{P}(X \geq a)$.
5. Soit $a > 0$. Calculer $\mathbb{P}(X \geq a + 1 | X \geq a)$.
6. Calculer $\mathbb{P}(Z \leq 3)$ et $\mathbb{P}(Z \leq 2)$.
7. Que vaut $\mathbb{P}(2 \leq Z \leq 3)$?
8. Calculer $\mathbb{P}(X \geq 1 | Z \geq 2)$.
9. Calculer $\mathbb{P}(Z \geq 2 | X \geq 1)$.

(Chaque question est notée sur un point sauf les questions 5, 6 et 8 qui sont notées sur deux points.)

Exercice 2 (4 points)
Une entreprise achète un lot de n disques durs et les met immédiatement en service. On suppose que les durées de vie (en années) de chacun de ces disques sont indépendantes et toutes modélisées par une même loi exponentielle $\mathcal{E}(\frac{1}{5})$.

1. Quelle est la probabilité pour qu'un disque donné tombe en panne avant quatre ans de fonctionnement ?
2. Quelle est la valeur minimale de n pour laquelle la probabilité qu'il reste au moins 2 disques en fonctionnement au bout de quatre ans est supérieure à 99 % ?

Exercice 3 (4 points)
Sur le campus de l'Université de Bourgogne, il y a 25 000 personnes étudiantes (14 000 femmes et 11 000 hommes). On choisit au hasard 500 personnes étudiantes parmi les 25 000. Estimer la probabilité que le nombre d'hommes choisis soit compris (au sens large) entre 200 et 230.

Exercice 4 (4 points)
Un jeu de 52 cartes est composé de 4 couleurs (cœur, trèfle, pique, carreau), avec 13 cartes dans chaque couleurs : 10 cartes basses numérotées de 1 à 10 et trois têtes (un valet, une dame et un roi).
On tire au hasard 26 cartes dans un jeu de 52 cartes. Quelle est la probabilité qu'on ait tiré, parmi ces 26 cartes, les 12 têtes du jeu ?

Exercice 5 (4 points)
On dispose d'une pièce (probabilité p de tomber sur « face »), qu'on lance jusqu'à ce qu'on obtienne une « face ». Tous les lancers sont supposés indépendants. On note X le nombre de lancers nécessaires pour obtenir « face ».

1. Justifier que pour tout entier $k \geq 1$, $\mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}$.
2. On définit, pour tous les t réels tels que cela a un sens,

$$\Phi(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k)t^k = \sum_{k=1}^{+\infty} p(1-p)^{k-1}t^k$$

   Montrer que $\Phi(t)$ est défini dès que $|t| < \frac{1}{1-p}$ et que dans ce cas

$$\Phi(t) = \frac{p}{1-p}\left(\frac{1}{1-(1-p)t} - 1\right) = \frac{pt}{1-(1-p)t}.$$

3. Que vaut $\Phi(1)$? Est-ce une surprise ?
4. Calculer $\Phi'(1)$. Déduire de ce qui précède l'espérance de X.

Exercice 6 (4 points)
Soit X une variable aléatoire réelle suivant la loi $\mathcal{E}(1)$. Est-ce que $Y = X^4$ est une variable aléatoire à densité ? Si oui, quelle est la densité de Y ? Tracer l'allure de la fonction de répartition de Y.