Polytech DIJON | **21 novembre 2024**
3A MDD - S5 | **Documents autorisés**
Durée : 80 minutes | **Calculatrices autorisées**

OUTILS MATHÉMATIQUES

Le candidat traitera l'exercice 1 et **deux** exercices au choix parmi les exercices 2, 3, 4, 5 et 6. Toutes les réponses doivent être justifiées.

Rappel Une variable aléatoire réelle X suit la loi de Poisson de paramètre λ si $\mathbb{P}(X=k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$ pour tout k de $\mathbf{N}$. L'espérance de X est $\mathbb{E}(X)=\lambda$ et la variance de X est $V(X)=\lambda$.

Exercice 1 (10 points)

La comptabilité d'une entreprise est divisée en trois services (A,B et C), avec des besoins d'impression quasiment identiques en moyenne et disposant chacun de leur système d'impression propre. On admet que pour chaque journée de travail le nombre d'incidents nécessitant une intervention par des techniciens spécialisés suit, pour chacun des trois systèmes d'impression, une loi de Poisson de paramètres respectifs λ_A, λ_B et λ_C (paramètres fixes dans le temps). Du 1 janvier au 15 novembre 2024 (200 journées de travail), on a constaté en tout 12 incidents pour le service A, 14 pour le service B et 16 pour le service C.

1. On définit la fonction

$$L: \begin{array}{rcl} \mathbf{R}^3 & \to & \mathbf{R} \\ (\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) & \mapsto & e^{-200(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)}\lambda_1^{12}\lambda_2^{14}\lambda_3^{16} \end{array}$$

Montrer que $\dfrac{\partial L}{\partial \lambda_1}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=L(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\dfrac{12-200\lambda_1}{\lambda_1}$.

2. Préciser le rapport entre la fonction L de la question 1 et une fonction de vraisemblance associée à un problème lié à l'énoncé.
3. En s'inspirant des questions 1 et 2, montrer que les estimateurs du maximum de vraisemblance pour les paramètres λ_A, λ_B et λ_C sont $\lambda_A^{MV}=\frac{3}{50}$, $\lambda_B^{MV}=\frac{7}{100}$ et $\lambda_C^{MV}=\frac{4}{50}$.
4. On veut tester l'hypothèse $\lambda_A=\lambda_B=\lambda_C$. Écrire le rapport de vraisemblance ρ correspondant.
5. Justifier que sous une hypothèse nulle à préciser $-2\ln\rho$ suit approximativement une loi du χ^2 à deux degrés de libertés. (ρ est défini en question 4).
6. Le responsable du service A explique à qui veut l'entendre que les incompétents des services B et C sont incapables d'utiliser correctement une imprimante. Est-ce que le nombre d'incidents constatés en 2024 permet d'appuyer ce propos ?

Exercice 2 (5 points)
Une entreprise achète 1000 disques durs et les met immédiatement en service. On suppose que les durées de vie (en années) de chacun de ces disques sont indépendantes et toutes modélisées par une même loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ (λ est un paramètre réel fixe mais inconnu). Le vendeur prétend que la durée de vie moyenne de ses disques est de 5 ans. Au bout d'un an, 400 disques sont tombés en panne et 600 disques fonctionnent encore. Que pensez-vous de l'indication de durée de vie du vendeur ?

Exercice 3 (5 points)

On lance 1500 fois un dé à 6 faces (numérotées de « 1 » à « 6 »), on compte le nombre de fois où chaque face est obtenue. Les résultats sont consignés dans le tableau ci-dessous.

Face	1	2	3	4	5	6
Nombre de sorties	238	287	277	235	228	235

Pensez-vous que ce dé est truqué ?

Exercice 4 (5 points)
Entre 2000 et 2005, le maximum journalier de concentration en ozone dans une certaine ville était en moyenne de 50 μg/m^3. En 2023 (365 observations), le maximum journalier de concentration en ozone dans la même ville était en moyenne de 45 μg/m^3. avec un écart-type de 17 μg/m^3. Peut-on raisonnablement affirmer que la pollution à l'ozone a diminué dans cette ville ? *(On supposera que l'approximation normale est justifiée.)*

Exercice 5 (5 points)
On lance 577 fois une pièce, qui tombe 203 fois sur face. Donner un intervalle de confiance à 95 % de la probabilité d'obtenir face avec cette pièce. Que pensez-vous de l'affirmation « Cette pièce a 50 % de chance de tomber sur face » ?

Exercice 6 (5 points)
On lance 1500 fois deux dés à 6 faces (numérotées de « 1 » à « 6 »), on compte pour chaque dé le nombre de fois où chaque face est obtenue. Les résultats sont consignés dans le tableau ci-dessous. (Lecture du tableau : le « 1 » a été obtenu 238 fois avec le dé 1, et 236 fois avec le dé 2.)

Face	1	2	3	4	5	6
Dé 1	238	287	277	235	228	235
Dé 2	236	283	279	239	225	238

Peut-on raisonnablement penser que les deux dés sont identiques ?