
TD 1 : variables aléatoires réelles

LE MINIMUM

Exercice 1. Roulette. On joue à la roulette (37 cases, dont 36 numérotées de 1 à 36 et le zéro), en pariant sur le 1 et en lançant une boule qui s'arrête dans une case. Si la boule s'arrête sur le 1, on gagne 35. Si la boule s'arrête sur n'importe quelle autre case, on perd 1. La roulette est parfaitement équilibrée (toutes les cases sont équiprobables) et on note X la variable aléatoire représentant le gain. Quelle est la loi de X ? Quelle est la fonction de répartition de X ?

Exercice 2. Densité. Pour chacune des fonctions suivantes, dire si elle est ou pas la densité d'une variable aléatoire réelle. Quelle est la fonction de répartition associée?

1.

$$f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ \begin{array}{ll} x \mapsto 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x \mapsto \cos(x) & \text{si } 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \\ x \mapsto 0 & \text{si } x > \frac{\pi}{2} \end{array}$$

4.

$$f_4 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ \begin{array}{ll} x \mapsto 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x \mapsto \sin^2(x) & \text{si } 0 < x \leq 2\pi \\ x \mapsto 0 & \text{si } 2\pi < x \end{array}$$

2.

$$f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ \begin{array}{ll} x \mapsto 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x \mapsto 3 & \text{si } 0 < x \leq \frac{1}{2} \\ x \mapsto 0 & \text{si } \frac{1}{2} < x \end{array}$$

5. Avec α une constante réelle

$$f_5 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{\alpha}{1+x^2}$$

3.

$$f_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ \begin{array}{ll} x \mapsto 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x \mapsto \sin(x) & \text{si } 0 < x \leq \frac{5\pi}{2} \\ x \mapsto 0 & \text{si } \frac{5\pi}{2} < x \end{array}$$

6. Avec α une constante réelle

$$f_6 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{\alpha}{1+|x|}$$

Exercice 3. Essence. La demande d'essence hebdomadaire dans une station service est une variable aléatoire de fonction de répartition F . On suppose que $F(x) = x^5$ pour x dans $[0, 1]$ avec x la demande d'essence en milliers de litres.

- Pourquoi suffit-il de donner F pour x dans $[0, 1]$?
- On remplit la cuve (d'une capacité de mille litres) tous les lundis à midi. Quelle est la probabilité qu'elle soit encore au moins à moitié pleine juste avant le remplissage?
- Quelle est la probabilité que la cuve soit exactement à moitié pleine juste avant le remplissage?

EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES

Exercice 4. Carré et densité. Soit X une variable aléatoire réelle ayant pour loi de probabilité la loi uniforme sur $[-1, 1]$ (densité $\frac{1}{2}\mathbf{1}_{[-1,1]}$). Est-ce que $Y = X^2$ est une variable aléatoire à densité? Si oui, quelle est la densité de Y ?

Exercice 5. Exponentielle et densité. Soit X une variable aléatoire réelle ayant pour loi de probabilité la loi uniforme sur $[-1, 1]$ (densité $\frac{1}{2}\mathbf{1}_{[-1,1]}$). Est-ce que $Y = e^X$ est une variable aléatoire à densité? Si oui, quelle est la densité de Y ?