
TD 4 : convergence de variables aléatoires

LE MINIMUM

Exercice 1. Acierie. On fabrique des plaques de tôle. L'épaisseur des plaques (en millimètres) est une variable aléatoire X qui suit une loi normale de paramètres $m = 0.3$ et $\sigma = 0.1$.

1. Quelle est la probabilité que X soit compris entre 0.25 et 0.35 ?
2. On empile n plaques (les épaisseurs sont supposées indépendantes). Quelle est la loi de la hauteur de la pile de n plaques ?
3. On empile des plaques comme dans la question 2 et on choisit $n = 100$.
 - a) Quelle est la probabilité que la hauteur de la pile soit comprise entre 25 et 35 millimètres ?
 - b) Pour quelle valeur de $h > 0$ a-t-on une probabilité de 95% que la hauteur de la pile de 100 plaques soit comprise entre $30 - h$ et $30 + h$ millimètres ?

Exercice 2. Démesure mécanique. On mesure la taille de deux pièces mécaniques, de taille respective m_1 et m_2 . Les mesures sont entachées d'erreur. Le résultat de la mesure de la pièce i (avec $i = 1$ ou 2) est une variable aléatoire X_i qui suit une loi normale de paramètres m_i et σ_i (σ_1 et σ_2 sont deux nombres strictement positifs connus). Les deux mesures sont supposées indépendantes.

1. Quelle est la loi de $X_2 - X_1$?
2. On suppose que $m_1 = 10$, $m_2 = 12$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 2$. Quelle est la probabilité que $X_1 > X_2$?
3. Pour améliorer la précision du dispositif, on remplace la mesure X_1 par la moyenne $\bar{X}_1$ de n mesures indépendantes de la première pièce, et la mesure X_2 par la moyenne $\bar{X}_2$ de n mesures indépendantes de la première pièce. On garde $m_1 = 10$, $m_2 = 12$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 2$.
 - a) Quelles sont les lois de $\bar{X}_1$ et $\bar{X}_2$?
 - b) Quelle est la loi de $\bar{X}_2 - \bar{X}_1$?
 - c) Pour quelle valeur de n a-t-on $\mathbb{P}(\bar{X}_1 > \bar{X}_2) < 10^{-4}$?

EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES

Exercice 3. Travailleurs, travailleuses. La population française compte 52% de femmes et 48% d'hommes. 22% des hommes sont des ouvriers. 5% des femmes sont des ouvrières.

1. Quelle est la proportion d'ouvriers (hommes et femmes) dans la population ? Quelle est la proportion de femmes ouvrières dans la population totale ?
2. On tire au hasard 1000 personnes dans la population. Quelle est la loi de probabilité du nombre d'ouvrières X dans cet échantillon ?
3. Quelle est l'espérance de X ? Quel est l'écart-type de X ?
4. Estimer la probabilité que X diffère de plus de 5% de $\mathbb{E}(X)$.

Exercice 4. Ni oui ni non. On dispose d'un échantillon représentatif de la population de 1000 personnes. On pose une question à chaque personne de l'échantillon. 482 personnes répondent « oui » et 518 répondent « non ».

1. Si la proportion de gens qui répondent « oui » dans la population totale est 47.9 %, quelle est la probabilité d'obtenir le résultat du sondage indiqué ci-dessus ?
2. Si la proportion de gens qui répondent « oui » dans la population totale est 50.1 %, quelle est la probabilité d'obtenir le résultat du sondage indiqué ci-dessus ?