Contrôle 1

Durée : 1h15.
Toutes les réponses devront être soigneusement justifiées. La qualité de la rédaction sera prise en compte dans le barême.
Tous documents interdits. Calculatrices interdites.

Exercice 1. Question de cours (*2 points*).
Soit $\ell \in \mathbb{R}$ et soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Donner la définition de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

Exercice 2. Valeur absolue (*3 points*). Résoudre l'équation suivante, d'inconnue x réelle :

$$|x^3| = x^2. \tag{1}$$

Exercice 3. Suite non convergente (*4 points*).
On rappelle que $\cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$.

1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle croissante ?
2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite qui converge vers 1.
3. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite qui converge vers $\frac{1}{\sqrt{2}}$.
4. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas.

Exercice 4. Toute suite croissante majorée converge (*5 points*).
On se propose de redémontrer que toute suite croissante majorée converge. Soit donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante majorée.

1. Exprimer avec des quantificateurs le fait que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit croissante.
2. Exprimer avec des quantificateurs le fait que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit majorée.
3. Soit l'ensemble $E = \{u_n : n \in \mathbb{N}\}$, pourquoi cet ensemble admet-il une borne supérieure ?
4. On pose $\ell = \sup(E)$. Soit $\epsilon > 0$.
   a) Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\ell - \epsilon \leqslant u_N \leqslant \ell$.
   b) Conclure.

Exercice 5. Borne inférieure (*3 points*). Soit $A =]0, +\infty[$.

1. Décrire, en justifiant, l'ensemble des nombres réels qui sont des minorants de A.
2. En déduire que A possède une borne inférieure, et la donner.

Exercice 6. Limite et multiplication (*3 points*).
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergeant vers $\ell \in \mathbb{R}$. En revenant à la définition, démontrer que la suite $(3u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 3ℓ.