

Travaux dirigés

Analyse

Table des matières

TD 1 – Logique et nombres réels.	2
TD 2 – La relation d'ordre sur la droite réelle	3
TD 3 – Suites réelles	4
TD 4 – Suites réelles et suites extraites.	6
TD 5 – Fonctions de la variable réelle (définition, limite et continuité)	7
TD 6 – Fonctions de la variable réelle (dérivation)	9
TD 7 – Fonctions logarithme et exponentielle.	11
TD 8 – Fonctions trigonométriques	12
TD 9 – Révisions de limites, utilisation des fonctions équivalentes.	13
TD 10 – Intégration (méthodes de base).	14
TD 11 – Intégration (changement de variable)	15
TD 12 – Intégration (révisions)	16
TD 13 – Équations différentielles linéaires du premier ordre	17
TD 14 – Équations différentielles linéaires du deuxième ordre	18

TD 1 – Logique et nombres réels

Le but de cette feuille est de bien comprendre ce que sont un énoncé et une démonstration mathématiques. Il est donc important de rédiger chaque solution de manière détaillée et rigoureuse.

Le minimum

Exercice 1. Notons $\mathcal{H}$ l'ensemble des êtres humains et pour tous $x, y \in \mathcal{H}$ notons $x \heartsuit y$ la propriété “ x aime y ”.

1. Relier chacune des phrases de gauche avec sa version quantifiée à droite.

- | | |
|--|---|
| (a) Tout le monde aime tout le monde. | (i) $\exists x \in \mathcal{H}, [x \heartsuit x \text{ et } \forall y \in \mathcal{H}, (x \heartsuit y \Rightarrow y = x)]$. |
| (b) Il y a des gens que personne n'aime. | (ii) $\exists x \in \mathcal{H}, \forall y \in \mathcal{H}, \text{non } (y \heartsuit x)$. |
| (c) L'amour n'est pas toujours réciproque. | (iii) $\forall x \in \mathcal{H}, \forall y \in \mathcal{H}, x \heartsuit y$. |
| (d) Il y a des gens qui n'aiment qu'eux-mêmes. | (iv) $\exists x \in \mathcal{H}, \exists y \in \mathcal{H}, x \heartsuit y \text{ et } (\text{non } y \heartsuit x)$. |

2. Traduire l'énoncé mathématique

$$\forall x \in \mathcal{H}, \forall y \in \mathcal{H}, \forall z \in \mathcal{H}, (x \heartsuit y \text{ et } y \heartsuit z) \Rightarrow x \heartsuit z \quad (1)$$

en une phrase en langage courant.

3. On suppose que l'énoncé (iii) est vrai. Montrer que sous cette hypothèse, l'énoncé (1) est alors vrai. *Autrement dit, vous venez de montrer que l'implication (iii) $\Rightarrow$ (1) est vraie.*

Exercice 2. Écrivez la phrase suivante avec des quantificateurs, puis démontrez la par l'absurde : “L'équation $x^2 = -1$ d'inconnue x réelle n'a pas de solutions”.

Exercice 3. Démontrer par double implication l'énoncé suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N} (n \neq 0 \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{N}, n = k + 1)).$$

Exercices supplémentaires

Exercice 4. Écrivez avec des quantificateurs la phrase suivante, puis démontrez la : “Il existe des réels $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que l'équation

$$ax + b = c,$$

d'inconnue x réelle, n'a pas de solution”.

Exercice 5. 1. En faisant une disjonction de cas, démontrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $n^2 \geq n$.

2. Est-il vrai que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $x^2 \geq x$?

Exercice 6. Démontrer chacune des assertions suivantes.

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x \leq y$.
2. $\forall \epsilon \in \mathbb{R}_*^+, \exists \delta \in \mathbb{R}_*^+, \forall x \in]-\delta, \delta[, x^2 < \epsilon$.

Exercice 7. Écrire avec des quantificateurs la phrase suivante, puis démontrez qu'elle est fausse : “Il existe un réel plus grand que tous les autres”. Que remarquez-vous par rapport à la question 1 de l'exercice précédent ?

Exercice 8. Démontrer par double implication l'équivalence suivante :

$$(\forall x \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, N > x) \Leftrightarrow \left(\forall \epsilon \in \mathbb{R}_*^+, \exists N \in \mathbb{N}_*, \frac{1}{N} < \epsilon \right)$$

On verra en cours que la propriété de gauche s'appelle la propriété archimédienne des réels, et est vraie. Celle de droite est donc vraie également !

TD 2 – La relation d'ordre sur la droite réelle

Le minimum

Exercice 9. Résoudre les inéquations suivantes d'inconnue x réelle :

1. $3x \leq x - 5$;
2. $(x + 3)(x + 4) \geq 0$.

Exercice 10. Résoudre les équations suivantes d'inconnue x réelle :

1. $|x| - 2|x + 3| = 0$;
2. $x^4 + 2x^2 = 3$.

Exercice 11. Soit $A = \{x \in \mathbb{Q} : x > x^2\}$.

1. L'ensemble A est-il majoré ? Minoré ? Vide ?
2. Déterminer, après avoir justifié leur existence, la borne inférieure et la borne supérieure de A .

Exercices supplémentaires

Exercice 12. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes

1. $\frac{x+3}{x+4} \geq 0$
2. $x^2 + 2x < 3$
3. $e^{2x} + 4e^x - 1 \geq 0$
4. $\cos^2(x) + \frac{1}{2}\cos(x) - \frac{1}{2} \leq 0$

Exercice 13. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes

1. $\frac{x}{|x-2|} = \frac{|x+1|}{3}$;
2. $|2+3x| - |x-1| = 2$.

Exercice 14. Les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}$ sont-ils vides ? majorés ? minorés ? Donner (si ils existent) leurs minimums, maximums, bornes inférieures et bornes supérieures.

1. $\mathbb{N}$
2. $[1, 2] \cup]3, 4]$
3. $[1, 2[\cup [3, 4]$
4. $\{1\} \cup]5, 6]$
5. $\mathbb{Q} \cap]5, 6[$

Exercice 15. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes

1. $\frac{x}{x^2-4} \geq \frac{1}{2(x-2)}$
2. $\frac{x^2+10}{3x^2+5} + \frac{x^2+1}{x^2-x+1} \geq 0$

Exercice 16. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes

1. $x^4 - 2x^2 + 1 = 0$
2. $\cos^4(x) - 2\cos^2(x) + 1 = 0$

Exercice 17. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes

1. $8x^4 + 2x^2 - 1 \leq 0$
2. $8\cos^4(x) + 2\cos^2(x) - 1 \leq 0$

Exercice 18. Quels sont les x réels tels que $\ln(x+3) - \ln(x-2) \geq 1$?

Exercice 19. Montrer que si un réel $x > 0$ est irrationnel, alors $\sqrt{x}$ est également irrationnel.

Le minimum

Exercice 20.

Les suites ci-dessous sont définies par leur premier terme et une relation de récurrence valable pour tout n de $\mathbb{N}$. Dans chaque cas, donner l'expression du terme général, la limite (si elle existe) et la somme des 100 premiers termes de la suite.

1. $\begin{cases} u_{n+1} &= 2u_n \\ u_0 &= 3 \end{cases}$

3. $\begin{cases} w_{n+1} &= -2w_n \\ w_0 &= 3 \end{cases}$

2. $\begin{cases} v_{n+1} &= 2 + v_n \\ v_0 &= 3 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_{n+1} &= x_n/2 \\ x_0 &= 3 \end{cases}$

Exercice 21.

On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et la relation de récurrence, valable pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n$. Que vaut u_{1000} ?

Exercice 22.

On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par u_0 (donné), et la relation de récurrence, valable pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = -u_n + 2$.

1. (Exemple) Calculer u_{1000} pour les valeurs suivantes de u_0

(a) $u_0 = 0$

(b) $u_0 = 1$

(c) $u_0 = -2$

2. On veut montrer que la suite (u_n) est périodique quelque soit le choix de u_0 . Trouver λ dans $\mathbb{R}$ tel que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie, pour tout n dans $\mathbb{N}$, par $v_n = u_n + \lambda$ soit géométrique.
3. Dédurre de la question précédente que, pour tout choix de u_0 , la suite (u_n) est périodique.

Exercices supplémentaires

Exercice 23.

On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0 = -1$, $u_1 = 1$ et la relation de récurrence, valable pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$. Que vaut u_{1000} ?

Exercice 24.

On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0 = 1$, $u_1 = 0$ et la relation de récurrence, valable pour tout n de $\mathbb{N}$,

$$u_{n+2} = u_n + u_{n+1}$$

1. Donner l'expression du terme général u_n .
2. Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right)_{n \in \mathbb{N}, n \geq 2}$ est bien définie.
3. Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}, n \geq 2}$ converge. Quelle est sa limite ?

Exercice 25.

On se donne trois nombres réels C , a et b , et on considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par récurrence

$$\begin{cases} u_{n+1} &= au_n + b \\ u_0 &= C \end{cases}$$

1. On suppose $a = 1$. Donner une expression simple du terme général u_n .
2. On suppose $a \neq 1$.
 - (a) Trouver m tel que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} = (u_n + m)_{n \in \mathbb{N}}$ soit géométrique.
 - (b) En déduire, pour tout n dans $\mathbb{N}$, une expression de u_n .
3. On emprunte 100 000 euros au taux mensuel de 0,2 % (ce qui signifie que si on doit une somme S le premier jour du mois, juste après avoir payé la mensualité, on devra $1.002 \times S$ le premier jour du mois suivant juste avant d'avoir payé la mensualité), et on rembourse l'emprunt par des mensualités de 1000 euros.
 - (a) Quel est le rapport avec le début de l'exercice ?
 - (b) Quel est le montant dû au bout de n mois ?
 - (c) Au bout de combien de temps l'emprunt sera-t-il remboursé ?
 - (d) Quel est le coût total pour l'emprunteur de cette opération ?

Le minimum

Exercice 26.

Pour chacune des suites réelles suivantes, dire si elle est convergente ou non en justifiant.

1. $u_n = (-\frac{1}{2})^n$
2. $v_n = \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)$,
3. $w_n = \exp((-1)^n)$.

Exercice 27.

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ donnée par $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1}$.

1. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\sum_{k=n+1}^{2n+1} \frac{1}{k+1} \geq \frac{1}{2}$. On pourra comparer les termes de la somme au dernier terme.
3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{2n+1} - u_n \geq \frac{1}{2}$.
4. En raisonnant par l'absurde, conclure que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

Exercices supplémentaires

Exercice 28.

Est-il vrai que de toute suite convergente, on peut extraire une sous-suite monotone convergente ?

Exercice 29.

Est-il vrai que de toute suite bornée, on peut extraire une sous-suite monotone convergente ?

Exercice 30.

Est-il vrai que de toute suite bornée, on peut extraire une sous-suite croissante ?

Exercice 31.

Donner un exemple de suite convergente non monotone (même à partir d'un certain rang).

TD 5 – Fonctions de la variable réelle (définition, limite et continuité)

Le minimum

Exercice 32.

Les fonctions suivantes sont-elles injective, bijective, surjective ?

$$1. \quad \begin{array}{ccc} f_1 : & \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ & x & \mapsto x^2 \end{array}$$

$$2. \quad \begin{array}{ccc} f_2 : & [0, +\infty[& \rightarrow \mathbb{R} \\ & x & \mapsto x^2 \end{array}$$

$$3. \quad \begin{array}{ccc} f_3 : & [0, +\infty[& \rightarrow [0, +\infty[\\ & x & \mapsto x^2 \end{array}$$

$$4. \quad \begin{array}{ccc} f_4 : & \mathbb{N} & \rightarrow \mathbb{N} \\ & x & \mapsto x^2 \end{array}$$

Exercice 33.

On considère la fonction

$$\begin{array}{ccc} f : & \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ & x & \mapsto x^2 \end{array}$$

Est-ce que f est bijective ? Peut-on définir une bijection réciproque $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$? Décrire les ensembles suivants

$$1. \quad f^{-1}(\mathbb{R})$$

$$2. \quad f^{-1}([0, +\infty[)$$

$$3. \quad f^{-1}(\{0\})$$

$$4. \quad f^{-1}(\{1\})$$

$$5. \quad f^{-1}(\{-1\})$$

$$6. \quad f^{-1}([-1, 4])$$

$$7. \quad f^{-1}([4, 9])$$

$$8. \quad f^{-1}(f([2, 3]))$$

Exercices supplémentaires

Exercice 34.

Pour n entier supérieur à deux, on définit

$$\begin{array}{ccc} f_n : & [0, 1] & \rightarrow \mathbb{R} \\ & x & \mapsto x^n - nx + 1 \end{array}$$

1. Montrer que f_n s'annule en un unique point, qu'on notera a_n .
2. Étudier la suite $(a_n)_{n \geq 2}$. Préciser notamment son sens de variation, sa limite éventuelle et un équivalent simple.

Exercice 35.

Un randonneur effectue un chemin sans boucle, tracé d'un refuge A à un refuge B. Il part de A à 6 heures (du matin) et arrive à B à 15 heures, en s'arrêtant de temps en temps pour se restaurer ou discuter avec d'autres randonneurs. Quelques jours après, il parcourt le chemin inverse, partant du refuge B à 6 heures du matin et arrivant au refuge A à 15 heures, après s'être arrêté de temps en temps pour se restaurer ou discuter avec d'autres randonneurs. Y a-t-il (au moins) un point du trajet auxquels le randonneur s'est trouvé à la même heure lors des deux parcours aller et retour ?

Exercice 36.

Donner un exemple de fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui soit à la fois continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, pas continue en $\{0\}$ et continue à gauche en $\{0\}$.

Exercice 37.

On définit la fonction

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{si } x \neq 0 \\ 0 &\mapsto 0 \end{aligned}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
2. Montrer que f vérifie la propriété des valeurs intermédiaires (l'image de tout intervalle est un intervalle).
3. Est-ce que f est continue sur $\mathbb{R}$?

Exercice 38.

L'équation $x = \cos(x)$ admet-elle des solutions réelles?

Exercice 39.

Montrer que, pour tout n dans $\mathbb{N}$, l'équation $x \sin(x) = \cos(x)$ admet au moins une solution dans l'intervalle $\left]n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$.

Exercice 40.

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue, telle que f admette une limite finie en $-\infty$ et une limite finie (pas forcément la même) en $+\infty$. Montrer que l'équation $x = f(x)$ admet au moins une solution réelle.

Exercice 41.

Voici un extrait d'un livre d'exercices de première année : « Quel est le domaine de définition de la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2 - 1}$? »

1. Quelle est la réponse attendue?
2. Au vu de l'exercice 21, expliquer la gêne du responsable de ce cours face à ce type d'énoncés.
3. Auriez-vous une idée de meilleure formulation de l'énoncé?

Exercice 42.

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, continue et sans point fixe ($f(x) \neq x$ pour tout x réel) et x_0 un réel. On définit par récurrence la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $x_{n+1} = f(x_n)$ pour tout n dans $\mathbb{N}$. Est-ce que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ peut avoir une limite finie?

TD 6 – Fonctions de la variable réelle (dérivation)

Le minimum

Exercice 43. En quels points les fonctions suivantes sont-elles dérivables ? Donner, le cas échéant, une expression de la dérivée.

$$\begin{aligned} f_1 : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto e^x \cos(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2 : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto e^{\cos(x)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_3 : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \cos(e^x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_4 : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sqrt{1 + \cos(\sin(x))} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_5 : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \cos(x^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_6 : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{\cos(x)}{1+x^2} \end{aligned}$$

Exercice 44. Calculer les limites suivantes (si elles existent).

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos(x)}}{\sin(x)}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin(x)}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{x}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos(x)}}{\cos(x)}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin(x)}{1 - e^x}$$

Exercices supplémentaires

Exercice 45.

On considère la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) \quad \text{si } x \neq 0 \\ 0 &\mapsto 0 \end{aligned}$$

En quels points la fonction f est-elle dérivable ?

Exercice 46.

On considère la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} ax^2 + bx + c & \text{si } x < 0 \\ \cos(x) + \sin(x) & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Pour quelles valeurs de a , b et c la fonction f est-elle continue en 0 ? dérivable en 0 ? C^1 en 0 ? C^2 en 0 ?

Exercice 47.

Donner un exemple de fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{R}$ tout entier, et dérivable partout sauf en 1, 2 et 3.

Pour aller plus loin

Exercice 48.

Montrer que pour tout n entier supérieur à 2, $\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln(n) < \frac{1}{n}$. En déduire que la suite

$$\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right)_{n \geq 1} \text{ diverge.}$$

Exercice 49.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable et ρ dans $[0, 1[$ tels que $|f'(x)| < \rho$ pour tout x réel. Soit x_0 un point de $\mathbb{R}$. On construit par récurrence la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $x_{n+1} = f(x_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

1. Montrer que pour tous n, m dans $\mathbb{N}$ tels que $n < m$, $|x_n - x_m| \leq \frac{\rho^n}{1-\rho} |x_1 - x_0|$.
2. En déduire que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une certaine limite que l'on notera l .
3. Que peut-on dire de $f(l)$?
4. On dit qu'un réel a est un point fixe de f si $f(a) = a$. Combien f admet-elle de point fixe ?
5. Comment vous-y prendriez vous pour résoudre numériquement l'équation $2x - \cos(x) = 0$?

Le minimum

Exercice 50.

Classer ces nombres par ordre croissant : $2^{(3^4)}$, $(2^3)^4$, $(4^3)^2$, $4^{(3^2)}$, $3^{(2^4)}$, $(3^2)^4$.

Exercice 51.

1. En utilisant la notion de dérivée, montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) = 1$.
2. Quelle est la limite, quand n entier tend vers $+\infty$, de $\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$?

Exercice 52.

Quels sont les x réels (si il y en a) tels que $\frac{1}{e^x - 1} = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$?

Exercice 53.

Soit a un nombre réel donné. L'équation en x : $x = \ln(x) + a$ admet-elle des solutions réelles ?

Exercices supplémentaires

Exercice 54.

Soit un réel $a > 0$, on définit alors la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ par : pour tout entier $n \geq 1$, $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^a}$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est croissante.
2. Montrer que pour tout n entier plus grand que 2, $\int_n^{n+1} \frac{1}{x^a} dx < \frac{1}{n^a} < \int_{n-1}^n \frac{1}{x^a} dx$.
3. En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée si et seulement si $a > 1$.
4. À quelle condition sur a la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge-t-elle ? Sa limite est souvent notée $\zeta(a)$, et la fonction $a \mapsto \zeta(a)$ est appelée fonction zeta de Riemann.

Exercice 55.

Montrer que pour tout x réel non nul, $\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = 2 \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{e^{2x} - e^{-2x}} - \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$.

Exercice 56.

Quelle est la limite, quand n entier tend vers l'infini, de $\left(1 + \frac{1}{n^2} \right)^n$?

Exercice 57.

1. Montrer, en utilisant la notion de dérivation, que $\frac{e^x - 1}{x}$ tend vers 1 quand x tend vers 0.
2. Quelle est la limite, quand x tend vers 0, de $\frac{x^x - x^{(x^2)}}{x}$?

TD 8 – Fonctions trigonométriques

Le minimum

Exercice 58. Donner les valeurs

- | | | |
|--------------------------------------|--------------------------------------|---------------------------------------|
| 1. $\cos(\pi)$ | 3. $\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)$ | 5. $\cos\left(\frac{13\pi}{6}\right)$ |
| 2. $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ | 4. $\tan\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ | 6. $\sin\left(\frac{11\pi}{4}\right)$ |

Exercice 59. Calculer

- | | | |
|--|---|---|
| 1. $\arccos(\cos(\pi))$ | 4. $\arcsin\left(\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$ | 7. $\arctan\left(\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$ |
| 2. $\arccos\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$ | 5. $\arcsin\left(\cos\left(\frac{13\pi}{6}\right)\right)$ | 8. $\arctan\left(\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$ |
| 3. $\arccos\left(\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)$ | 6. $\arcsin\left(\sin\left(\frac{11\pi}{4}\right)\right)$ | 9. $\arctan\left(\tan\left(\frac{11\pi}{4}\right)\right)$ |

Exercice 60. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos(x) + \sqrt{3}\sin(x) = 1$.

Exercices supplémentaires

Exercice 61. Calculer $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

Exercice 62. Calculer $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 63. Tracer le graphe de la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \arccos(\cos(x)) \end{aligned}$$

Exercice 64. Montrer que pour tout x réel strictement positif

$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Cette formule est-elle encore vraie pour $x < 0$? Pour $x = 0$?

Exercice 65.

Discuter, en fonction de x réel, l'existence et la valeur de la limite de la suite $\left(\sum_{k=0}^n \cos(kx)\right)_{n \in \mathbb{N}}$. Cette suite est-elle bornée ?

Exercice 66.

Discuter, en fonction de x réel, l'existence et la valeur de la limite de la suite $\left(\sum_{k=0}^n k \sin(kx)\right)_{n \in \mathbb{N}}$. Cette suite est-elle bornée ?

Le minimum

Exercice 67.

Est-il vrai que $x + 1 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x + 2$?

Exercice 68.

Est-il vrai que $\ln(x + 1) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(x + 2)$?

Exercice 69.

Est-il vrai que $e^{x+1} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} e^{x+2}$?

Exercice 70. Calculer les limites suivantes (si elles existent)

- | | | |
|---|---|---|
| 1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin(x^2)}{\sin(x^3)}$ | 4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{\sin(x^2)}}$ | 7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) \tan(\sin(x))}{1 - \cos(\sin(x))}$ |
| 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos(x^2)}{\cos(x^3)}$ | 5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos(x)}}{1 - e^x}$ | 8. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - \cos(x)}{\sin(x) \cos(x^2) + 1}$ |
| 3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos(x^2)}{1 - \cos(x^3)}$ | 6. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}$ | 9. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - \cos(x)}{\sin(x) \cos(x^2)}$ |

Exercice 71.

Donner un équivalent (simple) de $\sqrt{x^4 - x^2 + 1}$ quand x tend vers $+\infty$.

Exercices supplémentaires

Exercice 72.

Est-il vrai que si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et $h_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions équivalentes en 0, alors $f \circ h_1$ et $f \circ h_2$ sont équivalentes en 0 ?

Exercice 73.

Est-il vrai que si $h_1 : \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[$, $h_2 : \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[$ sont deux fonctions équivalentes en 0, alors $\ln(h_1)$ et $\ln(h_2)$ sont équivalentes en 0 ?

Exercice 74. On note x_n la n -ième solution positive de $x \tan(x) = 1$.

1. Donner un équivalent de x_n quand n tend vers $+\infty$.
2. Donner un équivalent de $x_n - \pi n$ quand n tend vers $+\infty$.

Le minimum

Exercice 75. Calculer

- | | | |
|----------------------|----------------------------|---------------------------------|
| 1. $\int_1^2 x^2 dx$ | 3. $\int_1^2 e^x dx$ | 5. $\int_0^{2\pi} \sin(2x) dx$ |
| 2. $\int_1^2 dx$ | 4. $\int_0^\pi \sin(x) dx$ | 6. $\int_0^{2\pi} \sin^2(x) dx$ |

Exercice 76. Calculer

- | | | |
|--------------------------|-------------------------|------------------------------|
| 1. $\int_0^1 x^2 e^x dx$ | 2. $\int_1^2 \ln(x) dx$ | 3. $\int_0^1 x^2 \sin(x) dx$ |
|--------------------------|-------------------------|------------------------------|

Exercice 77. Trouver a et b réels tels que, pour tout x dans $\mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$, $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$. En déduire le calcul de $\int_2^3 \frac{1}{x(x+1)} dx$.

Exercices supplémentaires

Exercice 78. Trouver a , b et c réels tels que, pour tout x dans $\mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$, $\frac{1}{x^2(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x+1}$. En déduire le calcul de $\int_2^3 \frac{1}{x^2(x+1)} dx$.

Exercice 79. On veut calculer $I_2 = \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2} dx$.

1. En écrivant $I_1 = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \int_0^1 1 \frac{1}{1+x^2} dx$ et en intégrant par partie (avec $u' = 1$), exprimer I_2 en fonction de I_1 .
2. Conclure : que vaut I_2 ?
3. Comment pourrait-on calculer $I_3 = \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^3} dx$?

Exercice 80.

1. Simplifier, pour n et N dans $\mathbb{N}$, $N \geq 1$, $\frac{1}{1 + \left(\frac{n}{N}\right)^2}$.
2. Quelle est la limite quand N tend vers l'infini de $\sum_{n=0}^N \frac{N}{N^2 + n^2}$?
3. Trouver un N entier tel que
$$\left| \sum_{n=0}^N \frac{N}{N^2 + n^2} - \frac{\pi}{4} \right| < 10^{-3}.$$
4. Est-ce une bonne façon de calculer une approximation de π ?

Le minimum

Exercice 81. Calculer

1. $\int_0^\pi \cos^2(x) \sin(x) dx$

3. $\int_0^\pi \cos^4(x) \sin^5(x) dx$

5. $\int_0^1 \sin(e^x) e^x dx$

2. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x)}{\cos(x)} dx$

4. $\int_0^1 x e^{x^2} dx$

6. $\int_1^2 \frac{\sin^3(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx$

Exercices supplémentaires

Exercice 82. Calculer

1. $\int_0^\pi \frac{\sin(x) \cos(x)}{1 + \cos^2(x)} dx$

3. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos(x)} dx$

5. $\int_0^1 \frac{\operatorname{ch}(x)}{1 + \operatorname{sh}(x)} dx$

2. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1 + \cos(x)} dx$

4. $\int_0^1 \frac{e^{2x} - 3e^x}{e^{2x} + 2e^x + 1} dx$

6. $\int_0^1 \frac{1 + \operatorname{sh}(x)}{1 + \operatorname{ch}(x)} dx$

Exercice 83. Calculer les intégrales suivantes

a) $\int_0^1 x \cdot \arctan x \, dx$

b) $\int_0^1 \frac{1}{x^2 + 16} \, dx$

c) $\int_1^2 \frac{x^2 + x + 2}{x(x^2 + 1)} \, dx$

d) $\int_0^1 \arctan x \, dx$

e) $\int_0^1 \frac{e^x}{1 + e^{2x}} \, dx$

f) $\int_0^1 \frac{x - 1}{x^2 + x + 1} \, dx$

g) $\int_0^1 \frac{1}{(x^2 + 1)^2} \, dx$

h) $\int_0^1 \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} \, dx$

i) $\int_0^1 \arcsin x \, dx$

j) $\int_0^1 \frac{x - 1}{x^2 + 2} \, dx$

k) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4 + x^2}} \, dx$

l) $\int_0^1 x^2 \operatorname{sh}(x) \, dx$

m) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2 - x^2}} \, dx$

n) $\int_1^2 \ln \left(x + \frac{1}{x} \right) \, dx$

Le minimum

Exercice 84.

Calculer les intégrales suivantes

1. $\int_0^\pi \sin^2(x) dx$

3. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2(x) dx$

5. $\int_0^1 \operatorname{sh}^2(x) dx$

2. $\int_0^{2\pi} \cos^2(x) dx$

4. $\int_0^1 \operatorname{ch}^2(x) dx$

6. $\int_0^1 \tanh^2(x) dx$

Exercice 85.

Calculer les intégrales suivantes

1. $\int_1^2 \ln(x) dx$

3. $\int_1^2 x^2 \ln(x) dx$

2. $\int_1^2 x \ln(x) dx$

4. $\int_1^2 (2x^2 - x + 3) \ln(x) dx$

Exercices supplémentaires

Exercice 86.

Quelle est la limite, quand n tend vers $+\infty$, de $\int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx$?

Exercice 87.

Calculer $\int_2^3 \frac{1}{\sqrt{2+x^2}} dx$.

Exercice 88.

On donne $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue, décroissante, telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(s) ds = +\infty$.

1. Montrer que, pour tout k entier,

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(s) ds \leq f(k).$$

2. En déduire que la suite $\left(\sum_{k=0}^n f(k) \right)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

3. Montrer que la suite $\left(\sum_{k=0}^n f(k) \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est équivalente à la suite $\left(\int_0^n f(s) ds \right)_{n \in \mathbb{N}}$.

4. Donner un équivalent simple, quand n tend vers l'infini, de $\sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{1+k}}$.

5. Donner une valeur approchée à 10^{-3} près de $\sum_{k=0}^{10^6} \frac{1}{\sqrt{1+k}}$.

TD 13 – Équations différentielles linéaires du premier ordre

Le minimum

Exercice 89.

Résoudre l'équation différentielle $y' = -2y + 1$ avec la condition initiale $y(0) = 1$.

Exercice 90.

Résoudre l'équation différentielle $y'(x) = -2y(x) + e^{-x}$ avec la condition initiale $y(0) = 1$.

Exercice 91.

Résoudre l'équation différentielle

$$y'(x) = -xy(x) - e^{-\frac{x^2}{2}}$$

avec la condition initiale $y(0) = 1$.

Exercices supplémentaires

Exercice 92.

L'équation différentielle $y'(x) + xy''(x) = x^2$ est-elle du premier ordre ? La résoudre en posant $u = y'$.

Exercice 93.

Résoudre l'équation différentielle (dite « de Bernoulli »)

$$y'(x) + xy(x) = y^2(x).$$

(On pourra poser $u = 1/y$ et montrer que u est solution d'une équation différentielle linéaire.)

Exercice 94.

Résoudre l'équation différentielle de Bernoulli

$$y'(x) + xy(x) = y^3(x).$$

(On pourra poser $u = y^\alpha$ avec $\alpha < 0$ bien choisi.)

Exercice 95.

Résoudre l'équation différentielle (dite « de Ricatti »)

$$y' = -1 - y(x) + 2y^2(x).$$

(On pourra chercher une solution évidente y_0 , poser $y = y_0 + u$, trouver une équation différentielle vérifiée par u et poser $z = 1/u$).

Le minimum

Exercice 96.

Résoudre l'équation différentielle

$$y''(x) - 5y'(x) + 6y(x) = 1$$

avec les conditions initiales $y(0) = y'(0) = 1$.

Exercice 97.

Résoudre l'équation différentielle

$$y''(x) - 5y'(x) + 6y(x) = e^{2x}$$

avec les conditions initiales $y(0) = y'(0) = 1$.

Exercice 98.

Résoudre l'équation différentielle

$$y''(x) - 5y'(x) + 6y(x) = xe^{2x}$$

avec les conditions initiales $y(0) = y'(0) = 1$.

Exercice 99.

Résoudre l'équation différentielle

$$y''(x) - 2y'(x) + y(x) = 1$$

avec les conditions initiales $y(0) = y'(0) = 1$.

Exercice 100.

Résoudre l'équation différentielle

$$y''(x) - 2y'(x) + y(x) = e^x$$

avec les conditions initiales $y(0) = y'(0) = 1$.

Exercice supplémentaire

Exercice 101.

On veut résoudre l'équation différentielle $y'(x) = e^{-x} + y(x) + e^x y^2(x)$ (équation dite « de Ricatti »).

1. Est-ce que cette équation est linéaire ?
2. Poser $v(x) = e^x y(x)$ et montrer que v vérifie une équation différentielle non linéaire du premier ordre.
3. Poser $v = -u'(x)/u(x)$ et montrer que u vérifie une équation différentielle linéaire du deuxième ordre à coefficients constants.
4. Trouver u , puis v et résoudre l'équation de départ.