
TD 3 : indépendance

LE MINIMUM

Exercice 1. Espérance et variance de la moyenne empirique. Soit $n \in \mathbb{N}$ et soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires i.i.d. de premier et second moment fini, d'espérance μ et de variance σ^2 .

1. Calculer l'espérance et la variance de $\bar{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$.
2. Même question pour $\frac{\bar{X}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$.

Exercice 2. Loi du double d'une uniforme. Soit X une variable aléatoire réelle de loi la loi uniforme sur $[0, 1]$. Quelle est la loi de $2X$? Préciser l'espérance et la variance de $2X$.

Exercice 3. Loi d'une somme d'uniformes indépendantes. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes ayant pour loi la loi uniforme sur $[0, 1]$. Quelle est la loi de $X + Y$? Préciser espérance et variance. Que vaut $\mathbb{P}(X > 0.5 | X + Y > 1)$?

Exercice 4. Loi d'un carré d'uniforme. Soit X une variable aléatoire réelle de loi la loi uniforme sur $[0, 1]$. Quelle est la loi de X^2 ? Préciser espérance et la variance.

Exercice 5. Loi d'un produit d'uniformes indépendantes. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes ayant pour loi la loi uniforme sur $[0, 1]$. Quelle est la loi de XY ? Préciser espérance et variance.

EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES

Exercice 6. Test positif.

Une maladie touche une proportion p_m de la population. Un test permet de détecter cette maladie. Quand une personne testée est malade, le test est positif avec une probabilité α . Quand une personne est saine, le test est positif avec une probabilité β .

On teste une personne prise au hasard dans la population. Le test est positif. Quelle est la probabilité pour qu'elle soit malade ? Application numérique : $p_m = 10^{-3}$, $\alpha = 0.99$, $\beta = 0.01$.

Exercice 7. Problème de Monty Hall.

Lors d'un jeu télévisé, le candidat est devant trois portes fermées, numérotées A , B et C . Derrière une de ces portes, choisie au hasard suivant une loi uniforme sur $\{A, B, C\}$, on a placé une voiture de luxe. Il n'y a rien derrière les deux autres portes.

Le candidat (qui ignore où est la voiture) choisit une porte et annonce son choix à la présentatrice (qui sait où est la voiture). La porte choisie par le candidat reste fermée pour l'instant. Comme à chaque fois, la présentatrice choisit une autre porte sans la voiture derrière et l'ouvre. Le candidat est maintenant invité à rester sur son premier choix de porte ou bien à changer pour l'autre porte fermée restante.

Quelle est la meilleure stratégie pour le candidat ?

Exercice 8. Corrélation et indépendance.

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\{-1, 0, 1\}$ telle que $\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = -1)$. On définit la variable aléatoire Y par $Y = 0$ si $X \neq 0$ et $Y = 1$ si $X = 0$.

1. Calculer $\text{cov}(X, Y)$.
2. Est-ce que X et Y sont indépendantes ?