

Percolation sur les coins de $\mathbb{Z}^2$

Ahmed Akram Bouaziz

Stage L3

*Sous La direction de François Le Maître
Institut Mathématique de Bourgogne*

Mai - Juillet 2025



Table des matières

1	Introduction	2
2	Mouvement brownien	3
2.1	Espace des fonctions continues et construction du mouvement brownien	3
2.2	Résultats préliminaires	4
3	Preuve du théoreme	7
4	Cas des directions préférées	9

1 Introduction

On considère le modèle introduit par Bálint Tóth de percolation sur $\mathbb{Z}^2$ suivant : On prend le graphe avec les sommets de $\mathbb{Z}^2$ et les arêtes $\{(a, b), (a + 1, b)\}$ et $\{(a, b), (a, b + 1)\}$ pour tout $a, b \in \mathbb{Z}$. Ensuite, de chaque ligne verticale chaque ligne horizontale, on supprime indépendamment et avec probabilité $\frac{1}{2}$ toutes les arêtes paires ou toutes les arêtes impaires. On choisit deux suites aléatoires $\{\xi(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ et $\{\eta(m)\}_{m \in \mathbb{Z}}$ telles que $\xi(i)$ (resp. $\eta(i)$) a probabilité $1/2$ d'être ± 1 . Plus formellement, notre espace est $(\{1, -1\}^{\mathbb{Z}}, \mathcal{P}(\{1, -1\})^{\otimes \mathbb{Z}}, (\frac{1}{2}\delta_{-1} + \frac{1}{2}\delta_1)^{\otimes \mathbb{Z}})^2$. Ces deux suites définissent alors la parité des arêtes supprimées : Si $\xi(n) = 1$ alors on supprime les arêtes impaires $\{(n, 2k - 1), (n, 2k)\}$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, et inversement si $\xi(n) = -1$ on supprime les arêtes paires $\{(n, 2k), (n, 2k + 1)\}$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et de même pour η et les arêtes horizontales. Intuitivement, c'est un graphe aléatoire où l'on impose que chaque sommet soit un coin, i.e. ait exactement une arête verticale et une horizontale. On le note $G(\xi, \eta)$. Comme il est bi-régulier, toute composante connexe est soit bi-infinie soit cyclique. En effet, en choisissant un sommet de départ et une direction de parcours, il y a un chemin unique ; si celui-ci est fini, il y a forcément un cycle, et comme chaque sommet a 2 voisins, on obtient que la composante elle-même est un cycle.

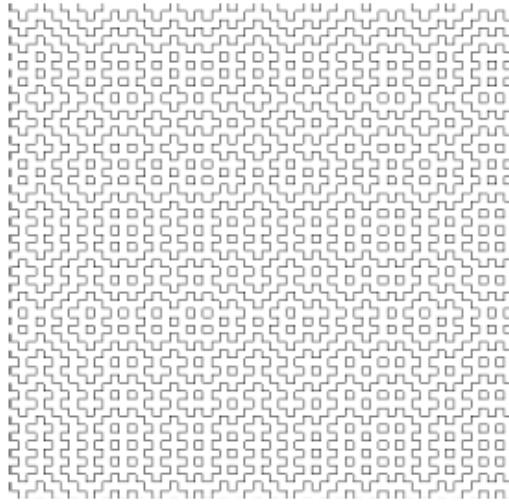


FIGURE 1 – Exemple d'une configuration restreinte MARCHAND, MARCOVICI et SIEST 2022

Le théorème suivant nous affirme que c'est le deuxième cas qui se réalise presque sûrement :

Théorème 1.1. *PETE 2008* G n'a pas de composantes connexes infinies. De plus, il y a une infinité de cycles autour de chaque sommet, et $\mathbb{E}[\text{longueur du cycle contenant } 0] = \infty$.

Pour démontrer le théorème, on va introduire une fonction « de hauteur ». En effet, on pourra regarder le graphe comme une carte, et les composantes connexes comme des lignes de niveau. Pour la définir, on colorie d'abord les faces des carrés de la grille de $\mathbb{Z}^2$ de manière alternée en noir et blanc comme un échiquier, la face contenant le point $(1/2, 1/2)$ étant noire, de sorte que la face $(m + 1/2, n + 1/2)$ est noire si et seulement si $m + n$ est pair. On pose $H(1/2, 1/2) = 0$. En prenant un chemin de $(1/2, 1/2)$ à $(m + 1/2, n + 1/2)$, si on passe d'un côté du contour à l'autre, d'une case noire à une case blanche (resp. blanche à noire), on incrémente la hauteur par 1 (resp. on décrémente par 1). On prouve facilement que H défini ainsi ne dépend pas du chemin suivi, en fait, on montrera une formule pour la hauteur $H(n + 1/2, m + 1/2)$ qui ne dépend que de n et m .

On pourra encoder cette construction de H avec des marches aléatoires simples X_n et Y_n définies en fonction de $(\xi(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ et $(\eta(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ de la manière suivante :

$$X_0 = Y_0 := 0$$

$$X_n := \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \xi(i), \quad Y_n := \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \eta(i) \quad \text{pour } n > 0$$

$$X_n := \sum_{i=-n+1}^0 (-1)^{i+1} \xi(i), \quad Y_n := \sum_{i=-n+1}^0 (-1)^{i+1} \eta(i) \quad \text{pour } n < 0$$

On vérifie que pour tout $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$:

$$H(n + 1/2, m + 1/2) = \left\lceil \frac{X_n + Y_m}{2} \right\rceil$$

on notera parfois $H(n, m)$.

En effet, si la formule est vraie pour $(2n, 2m)$, alors la face est noire, si $\xi(2n + 1) = 1$ alors on garde l'arête $\{(2n, 2m), (2n, 2m + 1)\}$ et donc $H(2n, 2m + 1) = H(2n, 2m) + 1$. Par ailleurs on a $X_{2n+1} = X_{2n} + 1$ et de plus $X_{2n} + Y_{2m}$ est paire donc $\left\lceil \frac{X_{2n+1} + Y_{2m}}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{X_{2n} + Y_{2m}}{2} \right\rceil + 1$. De même, si $\xi(2n + 1) = -1$ alors il n'y a pas d'arête et $\left\lceil \frac{X_{2n+1} + Y_{2m}}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{X_{2n} + Y_{2m}}{2} - 1/2 \right\rceil = \left\lceil \frac{X_{2n} + Y_{2m}}{2} \right\rceil$. Les mêmes arguments de parité marchent pour montrer les autres cas, plus intuitivement, la partie entière et la division par 2 assure que l'on ne croit ni décroît que quand on passe par une arête, et le $(-1)^{i+1}$ tient compte de la couleur de la face.

Cette construction nous permet d'étudier la hauteur en étudiant les deux marches aléatoires simples X_n et Y_n .

2 Mouvement brownien

2.1 Espace des fonctions continues et construction du mouvement brownien

La brève description suivante du mouvement brownien suit assez fidèlement les notes de cours d'Igor Kortchemski KORTCHEMSKI 2020a, elle a comme but seulement de donner un cadre simple de ce que l'on appelle mouvement brownien que l'on aura besoin de manipuler par la suite.

Définition 1. *Un mouvement brownien de dimension m $\{B(t) : t \geq 0\}$ est une famille $(B(t))_{t \geq 0}$ de variables aléatoires réelles qui satisfait les conditions suivantes :*

1. $B(0) = 0$
2. *Pour tout ensemble fini de temps $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$, les variables aléatoires $B(t_n) - B(t_{n-1}), \dots, B(t_2) - B(t_1)$ sont indépendantes.*
3. *Pour tout $t \geq 0$ et $h > 0$, on a $B(t + h) - B(t) \sim N(0, h \cdot I_m)$.*
4. *presque sûrement, $t \rightarrow B(t)$ est continu.*

Théorème 2.1. *Le mouvement brownien défini ci-dessus existe.*

Notation. Si K, E sont des espaces métriques avec K compact, on note $\mathcal{C}(K, E)$ l'ensemble des fonctions continues de K dans E , muni de la distance

$$d(f, g) = \sup_{x \in K} d_E(f(x), g(x)).$$

Proposition 2.2. *Soit (K, ρ) un espace métrique compact et (E, d_E) un espace polonais. Alors $(\mathcal{C}(K, E), d)$ est un espace polonais.*

Définition 2. *La tribu produit $\mathcal{B}(E)^{\otimes I}$ est la plus petite tribu sur E^I qui rend toutes les projections $\pi_t : E^I \rightarrow E$ mesurables. Les ensembles de la forme*

$$\{(x_i)_{i \in I} : (x_{t_1}, \dots, x_{t_k}) \in A_1 \times \dots \times A_k\},$$

avec $A_j \in \mathcal{B}(E)$, sont appelés cylindres et forment un π -système générateur.

Définition 3. Soit μ une mesure sur de probabilité sur E^I . Pour $t_1, \dots, t_k \in I$, on note $\mu_{t_1, \dots, t_k}$ la mesure image de μ par la projection $(x_i) \mapsto (x_{t_1}, \dots, x_{t_k})$. Ces mesures sont appelées marginales fini-dimensionnelles de μ .

Proposition 2.3. Une mesure μ est entièrement déterminée par ses marginales fini-dimensionnelles.

Théorème 2.4 (Extension de Kolmogorov). Toute famille cohérente de marginales sur E^I définit une unique mesure μ ayant ces marginales.

On note $C = \mathcal{C}(K, E)$, $\mathcal{B}_C$ la tribu borélienne de C , et $\mathcal{P}_C$ la trace de la tribu produit $\mathcal{B}(E)^{\otimes K}$ sur C .

Proposition 2.5. On a $\mathcal{B}_C = \mathcal{P}_C$.

Démonstration. Les projections $\pi_x : f \mapsto f(x)$ sont continues donc mesurables pour $\mathcal{B}_C$, ce qui implique $\mathcal{P}_C \subset \mathcal{B}_C$. On montre ensuite que les boules ouvertes de C sont mesurables pour $\mathcal{P}_C$. Par séparabilité de C , tout ouvert est une union dénombrable de boules ouvertes, donc mesurable. $\square$

L'espace $C(\mathbb{R}_+, E)$ est muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts, c'est un espace polonais qui est métrisable.

Définition 4. Soit $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ un mouvement brownien en dimension d , défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. La mesure de Wiener en dimension d est la mesure de probabilité $\mathbb{P}_0$ sur $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$ définie comme la mesure-image de $\mathbb{P}(d\omega)$ par l'application

$$\begin{aligned} \Phi : \quad \omega &\mapsto (B_t(\omega))_{t \in \mathbb{R}_+} \\ \Omega &\longrightarrow C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d) \end{aligned}$$

Proposition 2.6. LE GALL 2022

Soit $(B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien. Alors, pour tout choix de $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$, la loi du vecteur $(B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}})$ a pour densité.

$$p(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sqrt{(t_1 - t_0) \dots (t_n - t_{n-1})}} \exp \left(- \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - x_{i-1})^2}{2(t_i - t_{i-1})} \right)$$

où par convention $x_0 = 0$.

Démonstration. Les variables $B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ étant indépendantes et de lois respectives $N(0, t_1), N(0, t_2 - t_1), \dots, N(0, t_n - t_{n-1})$, le vecteur $(B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}})$ a pour densité

$$q(y_1, \dots, y_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sqrt{t_1(t_2 - t_1) \dots (t_n - t_{n-1})}} \exp \left(- \sum_{i=1}^n \frac{y_i^2}{2(t_i - t_{i-1})} \right)$$

et il suffit de faire le changement de variables $x_i = y_1 + \dots + y_i$ pour $i \in \{1, \dots, n\}$. $\square$

De même, en prenant des marginales fini-dimensionnelles qui satisfont ces formules sur $\mathcal{C}(R_+, \mathbb{R}^d)$, et en vérifiant qu'elles sont cohérentes, on montrera grâce au théorème d'extension de Kolmogorov l'existence de la mesure de Wiener et on aurait construit le mouvement brownien.

2.2 Résultats préliminaires

Soit $(X_i)_{i \geq 1}$ des variables aléatoires iid dans $\mathbb{R}^d$ telles que $\mathbb{E}(X_1) = 0$ et $\text{Cov}(X_1) = \text{Id}$. On pose $S_0 = 0$, $S_n = X_1 + \dots + X_n$, et on pose par interpolation linéaire $S_t = (1 - \{t\})S_{[t]} + \{t\}S_{[t]+1}$. On définit $S_t^{(n)} = \frac{S_{nt}}{\sqrt{n}}$, de sorte que $S^{(n)}$ est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$.

Lemme 2.7 (Théorème de Donsker). KORTCHEMSKI 2020b La suite $S^{(n)}$ converge en loi dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ vers un processus brownien $(B(t))_{t \geq 0}$.

Lemme 2.8 (de Poincaré). WALTERS 1982 Si $T : X \rightarrow X$ est une fonction mesurable préservant la mesure P , alors $\mathbb{P}(B \cap \limsup(T^k(B))^c) = 0$. En d'autres termes, a un ensemble de mesure nulle près, $B \subset \limsup T^k(B)$.

Démonstration. Il suffit de montrer que $B \setminus \bigcup_{n \geq k} T^{-n}(B)$ est de mesure nulle. On a $T^{-1}(\bigcup_{n \geq k} T^{-n}(B)) = \bigcup_{n \geq k+1} T^{-n}(B)$ Comme T préserve la mesure, ces deux ensembles ont même mesure. On a donc

$$\mathbb{P}(B \setminus \bigcup_{n \geq k} T^{-n}(B)) \leq \mathbb{P}(\bigcup_{n \geq 0} T^{-n}(B) \setminus \bigcup_{n \geq k} T^{-n}(B)) = \mathbb{P}(\bigcup_{n \geq 0} T^{-n}(B)) - \mathbb{P}(\bigcup_{n \geq k} T^{-n}(B)) = 0$$

□

Lemme 2.9. Si B est un événement de la tribu borélienne de $X := \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ tel que $\mathbb{P}(B) > 0$, alors B se produit à une infinité d'échelles presque sûrement, c'est-à-dire, si

$$T : X \rightarrow X \\ f \mapsto \left(x \mapsto \frac{f(2x)}{\sqrt{2}} \right)$$

alors $\mathbb{P}(\limsup T^k(B)) = 1$

Démonstration. Puisque T préserve la mesure P (en effet, $\lambda^{-1/2} B_{\lambda t}$ est un processus brownien), on déduit du lemme de Poincaré que

$$\mathbb{P}(\limsup T^k(B)) > \mathbb{P}(B) > 0.$$

Il suffit donc de montrer que T est *mélangeante*, c'est-à-dire que pour tous $A, B \in \mathcal{B}(X)$, on a :

$$\mathbb{P}(A \cap T^k(B)) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

On en déduira alors que pour tout événement stable par T ,

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap T^k(A)) \longrightarrow \mathbb{P}(A)^2,$$

donc $\mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$. Comme $\limsup T^k(B)$ est stable par T et de probabilité positive, on aura le résultat.

Montrons que T est mélangeante en suivant le plan suivant :

On montre que pour tous A, B cylindres, $\mathbb{P}(A \cap T^k(B)) \rightarrow \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$. Ensuite, on fixe un cylindre A , et on montre que si $(B_i)_{i \geq 0}$ sont des événements disjoints qui vérifient le mélange, alors

$$P \left(A \cap T^k \left(\bigcup_{i \geq 0} B_i \right) \right) \longrightarrow \mathbb{P}(A) P \left(\bigcup_{i \geq 0} B_i \right),$$

par σ -additivité et convergence dominée. De même,

$$\mathbb{P}(A \cap T^k(B^c)) = \mathbb{P}(T^{-k}(A) \cap B^c) = \mathbb{P}(T^{-k}(A)) - \mathbb{P}(T^{-k}(A) \cap B),$$

donc

$$\mathbb{P}(A \cap T^k(B^c)) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap T^k(B)) \longrightarrow \mathbb{P}(A)(1 - \mathbb{P}(B)) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B^c).$$

Donc l'ensemble des B satisfaisant le mélange pour un A fixé est un tribu qui contient les cylindres, il contient donc tout les boréliens. Cela donne le résultat pour A cylindre et B mesurable.

Comme on n'a pas utilisé la forme particulière de B , il est clair que le même argument montre que c'est vrai pour tout A mesurable en fixant B mesurable. Donc, c'est vrai pour tout A, B mesurables.

Il reste à montrer le mélange sur les cylindres : Comme $\mathbb{R}$ est σ -compact, on peut se restreindre sur des cylindres compacts :

On utilise la formule :

$$\mathbb{P}(B_{t_0} \in A_0, B_{t_1} \in A_1, \dots, B_{t_n} \in A_n) = \mathbf{1}_{A_0}(0) \int_{A_1 \times \dots \times A_n} \frac{dx_1 \cdots dx_n}{(2\pi)^{n/2} \sqrt{t_1(t_2 - t_1) \cdots (t_n - t_{n-1})}} \\ \times \exp \left(- \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - x_{i-1})^2}{2(t_i - t_{i-1})} \right),$$

où $x_0 = 0$.

Soient :

$$B = \{f \mid f(t_1) \in B_1, \dots, f(t_m) \in B_m, B_i \in \mathcal{B}(X)\}, \quad A = \{f \mid f(s_1) \in A_1, \dots, f(s_n) \in A_n, A_i \in \mathcal{B}(X)\}.$$

Alors :

$$\begin{aligned} T^{-k}(B) &= \{T^{-k}(f) \mid f(t_1) \in B_1, \dots, f(t_m) \in B_m\} \\ &= \{f \mid T^k f(t_1) \in B_1, \dots, T^k f(t_m) \in B_m\} \\ &= \left\{f \mid \frac{f(2^k t_1)}{\sqrt{2^k}} \in B_1, \dots, \frac{f(2^k t_m)}{\sqrt{2^k}} \in B_m\right\} \\ &= \left\{f \mid f(2^k t_1) \in \sqrt{2^k} B_1, \dots, f(2^k t_m) \in \sqrt{2^k} B_m\right\}. \end{aligned}$$

Quitte à appliquer T^{-k} pour un k suffisamment grand, on peut supposer que :

$$0 < s_1 < \dots < s_n < t_1 < \dots < t_m.$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \cap T^{-k}(B)) &= \int_{A_1 \times \dots \times A_n \times \sqrt{2^k} B_1 \times \dots \times \sqrt{2^k} B_m} \frac{dx_1 \cdots dx_n dy_1 \cdots dy_m}{(2\pi)^{(n+m)/2} \sqrt{s_1(s_2 - s_1) \cdots (s_n - s_{n-1})(2^k t_1 - s_n) \cdot 2^k(t_2 - t_1) \cdots 2^k(t_m - t_{m-1})}} \\ &\times \exp \left(- \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - x_{i-1})^2}{2(s_i - s_{i-1})} - \frac{(y_1 - x_n)^2}{2(2^k t_1 - s_n)} - \sum_{i=2}^m \frac{(y_i - y_{i-1})^2}{2 \cdot 2^k(t_i - t_{i-1})} \right), \end{aligned}$$

avec $x_0 = 0, s_0 = 0$.

En changeant de variable : $y'_i = \frac{y_i}{\sqrt{2^k}}$, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \cap T^{-k}(B)) &= \int_{A_1 \times \dots \times A_n \times B_1 \times \dots \times B_m} \frac{dx_1 \cdots dx_n dy_1 \cdots dy_m}{(2\pi)^{(n+m)/2} \sqrt{s_1(s_2 - s_1) \cdots (s_n - s_{n-1})(t_1 - \frac{s_n}{2^k}) \cdot (t_2 - t_1) \cdots (t_m - t_{m-1})}} \\ &\times \exp \left(- \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - x_{i-1})^2}{2(s_i - s_{i-1})} - \frac{(y_1 - \frac{x_n}{2^k})^2}{2 \cdot (t_1 - \frac{s_n}{2^k})} - \sum_{i=2}^m \frac{(y_i - y_{i-1})^2}{2(t_i - t_{i-1})} \right). \end{aligned}$$

Cela tend, par convergence dominée (Tout est intégrable car on intègre sur des compacts), vers :

$$\begin{aligned} &\int_{A_1 \times \dots \times A_n \times B_1 \times \dots \times B_m} \frac{dx_1 \cdots dx_n dy_1 \cdots dy_m}{(2\pi)^{(n+m)/2} \sqrt{s_1(s_2 - s_1) \cdots (s_n - s_{n-1})(t_1 - 0) \cdot (t_2 - t_1) \cdots (t_m - t_{m-1})}} \\ &\times \exp \left(- \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - x_{i-1})^2}{2(s_i - s_{i-1})} - \frac{(y_1)^2}{2(t_1)} - \sum_{i=2}^m \frac{(y_i - y_{i-1})^2}{2(t_i - t_{i-1})} \right) \\ &= \mathbb{P}(A) \mathbb{P}(B), \end{aligned}$$

ce qui termine la preuve. □

3 Preuve du théorème

On définit la région carrée $Q_N := \{(m+1/2, n+1/2), \max(m, n) = N\}$ et $A_{N,M} = \{(m+1/2, n+1/2), N \leq \max(m, n) \leq M\}$.

Lemme 3.1. *Si $0 < N < M$ et si la fonction de hauteur restreinte à la face extérieure de Q_N (resp. Q_M) est strictement positive (resp. strictement négative), alors il existe un contour de niveau 0 qui fait le tour de 0 dans la région entourée par les deux carrés.*

Remarque 1. *Le résultat s'applique dans le cas général de deux contours cycliques emboîtés, comme la preuve n'utilise pas la forme du carré.*

Démonstration. Comme la hauteur ne peut croître et décroître que de 1, il ne peut y avoir un chemin de Q_N à Q_M qui ne passe pas par une case de hauteur nulle. On va prouver qu'il y a un contour (qui sera cyclique car borné par Q_M) qui fait le tour de 0 entre Q_N et Q_M . On suppose par absurde que ce n'est pas le cas : les composantes connexes entre Q_N et Q_M sont toutes cycliques, elles sont disjointes et sont toujours séparées par au moins une face ; elles définissent un intérieur et un extérieur. Le fait qu'ils soient disjoints permet de montrer que $A_{N,M} \setminus \bigcup_{O \text{ intérieur de cycle dans } A_{n,m}} O$ est connexe (théorème de Jordan), mais cela donne un chemin de Q_N à Q_M qui ne touche aucun contour, et qui ne change donc pas d'hauteur, ce qui est absurde. Ensuite, on pourra supposer qu'un tel contour est de niveau strictement entre $h_1 := \inf_{(n,m) \in Q_N} H(n+1/2, m+1/2)$ et $h_2 := \sup_{(n,m) \in Q_M} H(n+1/2, m+1/2)$. En effet, sinon, on pourrait itérer en utilisant la remarque avec ce contour et Q_M et obtenir une suite de contours de plus en plus grands (au sens d'emboîtement) et de hauteurs supérieures ou égales à h_1 , ce qui est absurde car il ne pourrait y en avoir qu'un nombre fini.

Le même argument d'itération permet de faire une dichotomie pour trouver un contour de niveau 0 qui entoure 0. □

Preuve du Théorème 1.1. On pose l'événement :

$$A_N := \left\{ \begin{array}{ll} X_n \geq -\sqrt{N}, & n \in \{-N, \dots, N\}, \\ X_n \leq 2\sqrt{N}, & n \in \{-2N, \dots, 2N\}, \\ X_N > \sqrt{N}, & X_{-N} > \sqrt{N}, \\ X_{2N} < -2\sqrt{N}, & X_{-2N} < -2\sqrt{N} \end{array} \right\}$$

de sorte que si $B_N := A_N(X_n) \cap A_N(Y_m)$ se réalise, on aurait $H(Q_N) > 0$ et $H(Q_{2N}) < 0$ et donc on aurait un contour de niveau 0 qui entoure 0 par 3.1.

On pourra étendre les variables aléatoires $\frac{X_n}{\sqrt{N}}$ en des fonctions $\frac{X_{Nt}}{\sqrt{N}}$ définies d'abord sur les $\frac{k}{N}$ pour $k \in \{-RN, \dots, RN\}$, et qu'on étendra ensuite sur $[-R, R]$ par interpolation linéaire.

L'événement $A_N(X_n)$ s'écrit donc comme :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{X_{Nt}}{\sqrt{N}} \geq -1, & t \in [-1, 1], \\ \frac{X_{Nt}}{\sqrt{N}} \leq 2, & t \in [-2, 2], \\ \frac{X_N}{\sqrt{N}} > 1, & \frac{X_{-N}}{\sqrt{N}} > 1, \\ \frac{X_{2N}}{\sqrt{N}} < -2, & \frac{X_{-2N}}{\sqrt{N}} < -2 \end{array} \right\}$$

Par le théorème de Donsker, la suite $\left(\frac{X_{Nt}}{\sqrt{N}}\right)_{N \geq 0}$ converge en loi vers un brownien $(B(t))_{t \geq 0}$ (dans l'espace $C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$). Et de même, $\left(\frac{X_{Nt}}{\sqrt{N}}\right)_{N \leq 0}$ converge en loi vers un brownien dans $C(\mathbb{R}^-, \mathbb{R})$.

Le produit de ces deux espaces est $\Omega = \{f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(0) = 0\}$, qu'on munit de la tribu produit et de la mesure produit. On note aussi que T s'étend à cet espace et que le système dynamique sera toujours mélangeant comme produit de systèmes dynamiques mélangeants.

On pose alors

$$E = \left\{ f \in \Omega \left| \begin{array}{ll} f(t) \geq -1, & t \in [-1, 1], \\ f(t) \leq 2, & t \in [-2, 2], \\ f(1) > 1, & f(-1) > 1, \\ f(2) < -2, & f(-2) < -2 \end{array} \right. \right\}$$

qui est un borélien.
Sa frontière est

$$\{f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \exists x \in [-1, 1] : f(x) = 2 \text{ ou } \exists x \in [-2, 2] : f(x) = -1\} \cap E.$$

La probabilité que le maximum ou le minimum d'un brownien soit 2 ou -1 sur un intervalle fixe est nulle, en effet, ce maximum suit une loi à densité PRIVAULT 2023 ; on peut donc appliquer le théorème de Portemanteau et montrer que :

$$\mathbb{P}(A_N(X_n)) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\{B(t) \geq -1, t \in [-1, 1], B(t) \leq 2, t \in [-2, 2], B(1) > 1, B(-1) > 1, B(2) < -2, B(-2) < -2\})$$

On a de même :

$$A_{2^i N} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{X_{2^i N t}}{\sqrt{2^i N}} \geq -1, \quad t \in [-1, 1], \\ \frac{X_{2^i N t}}{\sqrt{2^i N}} \leq 2, \quad t \in [-2, 2], \\ \frac{X_{2^i N}}{\sqrt{2^i N}} > 1, \quad \frac{X_{-2^i N}}{\sqrt{2^i N}} > 1, \\ \frac{X_{2 \cdot 2^i N}}{\sqrt{2^i N}} < -2, \quad \frac{X_{-2 \cdot 2^i N}}{\sqrt{2^i N}} < -2 \end{array} \right\}$$

ce qui correspond à la limite :

$$\left\{ f \in \Omega \left| \begin{array}{l} \frac{f(2^i t)}{\sqrt{2^i}} \geq -1, \quad t \in [-1, 1], \\ \frac{f(2^i t)}{\sqrt{2^i}} \leq 2, \quad t \in [-2, 2], \\ f(2^i) > 1, \quad f(-2^i) > 1, \\ f(2 \cdot 2^i) < -2, \quad f(-2 \cdot 2^i) < -2 \end{array} \right. \right\} = T^{-i}(E)$$

et donc on a $\mathbb{P}(A_{2^i N}) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(T^{-i}(E))$.

On considère l'événement

$$\bigcup_{\substack{I \subset \{1, \dots, n\} \\ |I| \geq k}} \bigcap_{i \in I} A_{2^i N}.$$

Comme on n'a que des intersections et des réunions finies, le bord de cet événement est inclus dans

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \partial A_n.$$

On a alors, par le théorème de Portemanteau, comme cela est de mesure nul, que

$$\mathbb{P} \left(\bigcup_{\substack{I \subset \{1, \dots, n\} \\ |I| \geq k}} \bigcap_{i \in I} A_{2^i N} \right) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left(\bigcup_{\substack{I \subset \{1, \dots, n\} \\ |I| \geq k}} \bigcap_{i \in I} T^{-i}(E) \right).$$

Pour n assez grand,

$$\mathbb{P} \left(\bigcup_{\substack{I \subset \{1, \dots, n\} \\ |I| \geq k}} \bigcap_{i \in I} T^{-i}(E) \right) > 1 - \varepsilon,$$

car $\mathbb{P}(\limsup T^{-i}(E)) = 1$, par le lemme 2.9.

Donc, en fixant ce n et en prenant N assez grand, on a

$$\mathbb{P} \left(\bigcup_{\substack{I \subset \{1, \dots, n\} \\ |I| \geq k}} \bigcap_{i \in I} A_{2^i N} \right) > 1 - 2\varepsilon.$$

Ainsi, la probabilité qu'au moins k événements parmi les A_j se réalisent est supérieure à $1 - 2\varepsilon$, indépendamment de n et N . Cela est donc vrai pour tout $\varepsilon > 0$, et cette probabilité est égale à 1.

Comme cela est vrai pour tout k , on a presque sûrement que $\limsup A_i$ se réalise.

Par indépendance de X_n et Y_n , le couple $\left(\frac{X_{Nt}}{\sqrt{(N)}}, \frac{Y_{Nt}}{\sqrt{N}}\right)$ converge en loi vers (X_t, Y_t) , un couple de browniens, c'est un produit de deux systèmes dynamiques mélangeants, donc il est mélangeant, un argument identique à celui du lemme 2.9 et tout ce qui précède montre que $\mathbb{P}(\limsup B_n) = 1$.

De plus, quitte à tout translater, le même argument fonctionne pour un point quelconque.

Cela implique le deuxième point du théorème. Pour le premier point, il suffit de voir que s'il y avait une composante infinie, elle couperait le plan en deux régions, de sorte que si x appartient à cette composante, il ne pourrait avoir aucune composante autour de lui, ce qui est de probabilité nulle. Donc, presque sûrement, les composantes connexes sont finies.

Il nous reste à calculer l'espérance de la longueur du cycle contenant 0 : pour cela, on regarde l'intersection de ce cycle avec l'axe des abscisses d'abscisse N minimal. Cela nous donne une excursion de taille N de la marche aléatoire simple X_n . Si cette excursion est de taille $> n$, il est clair que le diamètre de notre cycle l'est aussi.

Comme la longueur des excursions de la marche aléatoire simple a une queue de distribution de $\approx cn^{-1/2}$, on a :

$$\mathbb{P}(\text{diamètre} > n) \geq cn^{-1/2}$$

et cette série diverge, donc on a $\mathbb{E}[\text{longueur du cycle contenant } 0] = \infty$. $\square$

4 Cas des directions préférées

Le modèle précédent a une interprétation en termes de marche aléatoire avec mémoire. Selon la parité des arêtes gardées sur une ligne ou une colonne, on décidera d'aller à droite ou à gauche et puis en haut ou en bas, cela impose que la direction prise sur une même ligne ou colonne sera toujours la même. Ce que nous dit le théorème 1.1 est donc que cette marche est récurrente et que son temps de retour "espéré" est infini. On va chercher de garder cette analogie dans le modèle biaisé. Dans ce cas, si on voulait que la probabilité que la marche choisisse d'aller à droite soit q , on aura besoin d'alterner selon la parité du sommet (la parité de la somme de ses coordonnées). On définit donc $\mathbb{Z}_e := \{(n, m) \in \mathbb{Z}^2, \exists k : n + m = 2k\}$ et $\mathbb{Z}_o := \{(n, m) \in \mathbb{Z}^2, \exists k : n + m = 2k + 1\}$ Et on gardera l'arête Si et seulement si $(n, m) \in \mathbb{Z}_e$ et $\xi(n) = 1$ ou $(n, m) \in \mathbb{Z}_o$ et $\xi(n) = -1$ Et l'arête. Si et seulement si $(n, m) \in \mathbb{Z}_e$ et $\eta(n) = 1$ ou $(n, m) \in \mathbb{Z}_o$ et $\eta(n) = -1$.

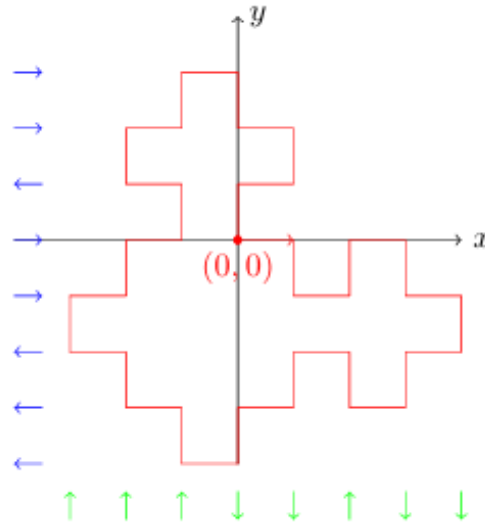


FIGURE 2 – Exemple de la marche avec mémoire MARCHAND, MARCOVICI et SIEST 2022

Remarque 2. *Ce modèle est assez symétrique*

1. Le modèle de paramètres (p, q) a la même loi que le modèle de paramètres $(1 - p, 1 - q)$ translaté par $(1, 0)$ ou par $(0, 1)$. donc la distribution $\mathbb{P}$ est invariante par des translations paires.
2. Le modèle de paramètres (p, q) a la même loi que le modèle obtenu par symétrie par rapport à l'axe des x (respectivement l'axe des y) du modèle de paramètres $(p, 1 - q)$ (respectivement $(1 - p, q)$).
3. Le modèle de paramètres (q, p) a la même loi que le modèle obtenu par symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$ du modèle de paramètres (p, q) .

On note $\mathcal{G}$ l'espace des sous graphes de $\mathbb{Z}^2$ qui vérifient les contraintes de notre modèle. On a alors que

Proposition 4.1. *Les translations $\tau_{(k,l)}$ paires $((k, l) \in \mathbb{Z}_e)$ sont ergodiques.*

Démonstration. On montre que $\tau_{(k,l)}$ est mélangeante selon le même schéma qu'avant. Si A et B sont mesurable par rapport des ensembles finis de lignes et colonnes I_A et I_B , par indépendance des lignes et colonnes, et que a partir d'un certain rang N $\tau_{(k,l)}^{-n}(I_B) \cap I_A = \emptyset$ donc on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A \cap \tau_{(k,l)}^{-n}(B)) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

Par les mêmes arguments qu'avant, ce mélange reste vrai pour tout les événements. □

Théorème 4.2. *Pour tout $(k, l) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $k \neq 0$ et $l \neq 0$, si $f \in L^1(G)$, alors*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f \circ \tau_{(k,l)}^i = \mathbb{E}(f) \quad p.s.$$

C'est le théorème ergodique de Birkhoff WALTERS 1982 énoncé dans notre cas particulier.

Théorème 4.3. *MARCHAND, MARCOVICI et SIEST 2022 Avec probabilité positive, la composante connexe de l'origine est infinie. De même, presque sûrement, il y a une infinité de composantes connexes infinies.*

La preuve utilisera la même fonction d'hauteur, mais elle s'exprimera légèrement différemment par rapport aux variables ξ et η , en effet, avec la règle de parité on a : $H(n + 1/2, m + 1/2) = \lceil \frac{X_n + Y_m}{2} \rceil$ mais cette fois-ci

$$\begin{aligned} X_0 &= Y_0 := 0 \\ X_n &:= \sum_{i=1}^n \xi(i), \quad Y_n := \sum_{i=1}^n \eta(i) \quad \text{pour } n > 0 \\ X_n &:= \sum_{i=-n+1}^0 \xi(i), \quad Y_n := \sum_{i=-n+1}^0 \eta(i) \quad \text{pour } n < 0 \end{aligned}$$

Théorème 2.1. Preuve : Par les propriétés de symétrie, on peut se ramener au cas $q > 1/2$. Par la loi des grands nombres, il existe $K > \frac{16}{2q-1}$ tel que l'événement

$$\forall n \geq K, \quad \frac{X_n}{n} - \frac{2q-1}{2} > \frac{2q-1}{4}, \quad \frac{X_{-n}}{n} - \frac{1-2q}{2} < \frac{1-2q}{4}$$

ait probabilité positive.

En prenant $m \leq (2q-1)n$, on a sur cet événement que :

$$\left\lceil \frac{X_n + Y_m}{2} \right\rceil > \frac{n}{2} \left(\frac{\frac{X_n}{n} - (2q-1)}{2} \right) > 1 \quad \text{et de même} \quad \left\lceil \frac{X_{-n} + Y_{-m}}{2} \right\rceil < -1.$$

On définit donc l'événement :

$$A = \left\{ \forall n \geq K, \forall 0 \leq m \leq \frac{2q-1}{2}n, \left\lceil \frac{X_n + Y_m}{2} \right\rceil > 1 \text{ et } \left\lceil \frac{X_{-n} + Y_{-m}}{2} \right\rceil < -1 \right\}$$

qui sera de probabilité positive.

On pose alors

$$\Pi : (\{-1, 1\})^{\mathbb{Z}} \rightarrow (\{-1, 1\})^{\mathbb{Z} \setminus [-K, K]^2}, \quad (\xi_n, \eta_n) \mapsto ((\xi_n)_{|n| > K}, (\eta_n)_{|n| > K})$$

Et l'événement

$$A_{st} := \{(\xi, \eta) \mid \Pi(\xi, \eta) \in \Pi(A), (\xi_K, \eta_K) = (1_K, 1_K)\}$$

où ξ_K est la restriction de ξ à $[-K, K]$.

Par indépendance, on a :

$$\mathbb{P}(A_{st}) = P((\xi_K, \eta_K) = (1_K, 1_K)) \cdot P(\Pi^{-1}(\Pi(A))) > p^{2K+1} q^{2K+1} \mathbb{P}(A)$$

De plus $A_{st} \subset A$, en effet :

$$\begin{aligned} H_{(\xi, \eta)} \left(n + \frac{1}{2}, m + \frac{1}{2} \right) &= \left\lceil \frac{X_n + Y_m}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{K + \sum_{k=K+1}^n \xi(k) + \min(m, K) + \sum_{k=\min(m, K)+1}^m \eta(k)}{2} \right\rceil \\ &= \left\lceil \frac{K + \sum_{k=K+1}^n \tilde{\xi}(k) + \min(m, K) + \sum_{k=\min(m, K)+1}^m \tilde{\eta}(k)}{2} \right\rceil \\ &\geq \left\lceil \frac{\sum_{k=1}^n \tilde{\xi}(k) + \sum_{k=1}^m \tilde{\eta}(k)}{2} \right\rceil \geq \left\lceil \frac{\tilde{X}_n + \tilde{Y}_m}{2} \right\rceil = H_{(\tilde{\xi}, \tilde{\eta})} \left(n + \frac{1}{2}, m + \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

Et de la même manière on prouve :

$$H_{(\xi, \eta)} \left(-n + \frac{1}{2}, -m + \frac{1}{2} \right) > H_{(\tilde{\xi}, \tilde{\eta})} \left(-n + \frac{1}{2}, -m + \frac{1}{2} \right)$$

Sur A_{st} , les composantes connexes sont des escaliers, le contour de l'origine est de hauteur -1 . S'il était fini, alors les points $(K, -K)$ et $(-K, K)$ sont connectés dans $(\mathbb{Z} \setminus [-K, K])^2$, mais alors on passe forcément par une des régions

$$-\frac{2q-1}{2}n \leq m \leq \frac{2q-1}{2}n, \quad n > K \text{ ou } n < -K$$

qui sont par construction de hauteurs > 1 ou < -1 respectivement, ce qui est absurde car la hauteur est constante selon un contour.

Donc, avec probabilité positive, la composante de l'origine est infinie.

Ensuite, en prenant (k, l) tels que $0 < \frac{k}{l} < \frac{2q-1}{2}$, par le théorème 4.2 on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{1}_{A_{st}} \circ \tau_{(k, l)}^i = \mathbb{P}(A_{st}) > 0$$

Presque sûrement.

Ce qui donne une suite N_k telle que $N_{k+1} - N_k > K$ et $\tau^{-N_k}(A_{st})$ se réalise. Les composantes des points (N_k, N_k) sont infinies est disjointes par construction. En effet, les translatés passent par des régions de hauteurs différentes grâce à la condition $0 < \frac{k}{l} < \frac{2q-1}{2}$. Donc on prouve qu'il y a une infinité de composantes connexes infinies presque sûrement. $\square$

Références

- KORTCHEMSKI, Igor (2020a). en. Chap. 4. URL : <https://igor-kortchemski.perso.math.cnrs.fr/M2/TheoremesLimites-cours.pdf>.
- (2020b). en. Chap. 5. URL : <https://igor-kortchemski.perso.math.cnrs.fr/M2/TheoremesLimites-cours.pdf>.
- LE GALL, Jean-François (2022). *Measure Theory, Probability, and Stochastic Processes*. T. 295. Graduate Texts in Mathematics. Formula 14.4. Springer.
- MARCHAND, Régine, Irène MARCOVICI et Pierrick SIEST (2022). *Corner percolation with preferential directions*. arXiv : 2212.04399 [math.PR]. URL : <https://arxiv.org/abs/2212.04399>.
- PETE, Gábor (2008). “Corner percolation on $\mathbb{Z}^2$ and the square root of 17”. English. In : *Ann. Probab.* 36.5, p. 1711-1747. ISSN : 0091-1798. DOI : 10.1214/07-AOP373.
- PRIVAUT, Nicolas (2023). “Introduction to Stochastic Finance with Market Examples, Second Edition”. In : *Introduction to Stochastic Finance with Market Examples, Second Edition*. Chapman et Hall/CRC. Chap. 10. DOI : 10.1201/9781003298670. URL : <https://doi.org/10.1201/9781003298670>.
- WALTERS, Peter (1982). *An Introduction to Ergodic Theory*. New York : Springer-Verlag.